

求非线性系统对称群的新方法

马红彩^{1,2}

(1. 东华大学 理学院, 上海 201620; 2. 东华大学 非线性研究所, 上海 201620)

摘要: (1)从 Lax 可积系统的 Lax 对出发, 寻找非线性系统的对称及精确解, 利用这种方法可以解决不少 $(2+1)$ 维的可积系统, 它的优点在于比较简洁方便, 这从 KP 方程的求解对比就可以看出. (2)从 CK 直接法入手, 将这种方法进行修正, 利用这种修正的 CK 直接法求非线性系统的对称和精确解; 这种方法的优点在于不但可以用于可积系统, 而且也适用于不可积系统, 还可以求出离散群. 另外, 这种方法也适用于高维的不可积模型.

关键词: 对称; 严格解; 对称群; Bäcklund 变换; Lax 对; CK 直接法; 非线性叠加公式

中图分类号: O41

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2020) 05-0032-07

自 20 世纪 60 年代, Lax^[1]从微分算子的视角把 KdV 方程表示成算子方程, 进而表明用反散射变换方法(IST)求解方程的核心是找到该方程的 Lax 对(这也表明反散射可积其实也就是 Lax 可积). 随后, 有许多学者考察了一类二阶矩阵常微分算子的特征值问题, 导出了与之相联系的非线性演化方程梯队, 由此得到了与该特征值问题的反问题相关联的线性积分方程, 从而加速了散射反演方法的迅猛发展. 到 20 世纪 70 年代初, 前苏联的 Zakharov 和 Shabat^[2]基于 Lax 想法, 把它推广应用到了高阶 KdV 方程以及立方非线性 Schrödinger 方程等, 用实际例子表明了反散射方法的普适性. 接着, Wadati^[3]用反散射的方法解决了 MKdV 方程, 同时 Kruskal 也用相应的方法研究了 sine-Gordon 方程的求解. 在以后的 2 年里, Ablowitz、Kaup、Newell 和 Segur(AKNS)^[4]把这个方法推广到了更一般的情形, 通过反散射来求解一大批非线性方程的解. 1975 年, Wahlquist 和 Estabrook(WE)^[5]给出了含 2 个独立变量的非线性发展方程的延拓法, 他们从 Lie 代数出发得到方程的 Lax 对. 这些研究成果为反散射变换法求解方程提供了必要的支撑, 表明了 Lax 对在可积的非线性系统中有着重要的作用.

面对讨论的目标方程(非线性发展方程, 一般都是偏微分方程), 经典的对称群研究方法常囿于寻找李点对称, 这在传统李群理论中只要研究无穷小形式就够了. 求解对应的常微分方程或方程组的初值问题就很方便求得唯一对应的 Lie 群. 然而, 这对于偏微分方程太过基础, 还有大量的研究课题值得探究. 一方面我们即便有李代数表示, 但是求解对应的初值问题, 进而去求有限变换及对称群也并非易事; 另一方面, 在大部分情形下, 初值问题的解可以求得, 然而对应的表达式相当繁琐, 并不具备实际应用价值. 再者, 在很多时候, 常规的对称群可能就不是 Lie 群, 而是更广义的连续群, 这就使得非线性系统的求解更加困难. 幸运的是, 如果我们只是寻找那些 Lax 可积模型的对称群, 结果就完全不同.

1 Lax 可积系统对称群及严格解

Lax 对在研究可积模型的各种性质中起着举足轻重的作用. 它是确定一个给定偏微分方程的具体可积性的方法之一. 事实表明^[6-8], 可积模型的 Lax 对在寻找无穷多对称(无穷小变换)有限变换(对称群)中也同样起着很大的作用.

为了便于说明, 下面通过对 KP 方程:

$$u_{xt} + (u_{xxx} - 6uu_x)_x + 3u_{yy} = 0 \quad (1)$$

的研究来具体说明用Lax对的方法求一个非线性系统的对称及严格解.

众所周知, KP方程的Lax对为:

$$\Phi_{xx} + u'\Phi + \sqrt{\sigma}\Phi_y = 0, \quad (2a)$$

$$\Phi_t + \Phi_{xxx} + \frac{3}{2}u'\Phi_x - \frac{3}{4}(u'_x - \sqrt{\sigma}\int u'_y dx)\Phi = 0, \quad (2b)$$

其中: u' 是KP方程的一个解. 令

$$\Phi = G\Psi(\xi, \eta, \tau), \quad (3)$$

其中: G, ξ, η, τ 是 x, y, t 的函数, 将它代入方程(2a), 如果我们限定 Ψ 满足与方程(2)一样的方程, 可以得到第1组 ξ, η, τ 和 G 的限定方程:

$$\tau_x = 0, \tau_y = 0, \quad (4a)$$

$$\eta_x = 0, \eta_y = \xi_x^2, \quad (4b)$$

$$2G_x\xi_x + G\xi_{xx} + \sqrt{\sigma}G\xi_y = 0, \quad (4c)$$

$$G_{xx} - G\xi_x^2 u(\xi, \eta, \tau) + \sqrt{\sigma}G_y + u'G = 0, \quad (4d)$$

同样做法, 把方程(3)代入方程(2b), 得到另一组待定函数的限定方程:

$$\xi_x^3 = \tau_t, \quad 3\sqrt{\sigma}G_x\xi_x^2 = G\eta_t, \quad (5a)$$

$$G\xi_t + 3G_{xx}\xi_x + \frac{3}{2}u'G\xi_x - \frac{1}{2}Gu(\xi, \eta, \tau)\tau_t - G\xi_x^3 u(\xi, \eta, \tau) = 0, \quad (5b)$$

$$G_t + G_{xxx} + \frac{3}{2}uG_x + \frac{3}{4}Gu_x - \frac{3}{4}G\sqrt{\sigma}\int u_y dx + \frac{3\sqrt{\sigma}}{4}G\tau_t\int u_{\eta}(\xi, \eta, \tau)d\xi - \frac{3}{4}G\tau_t u_1(\xi, \eta, \tau) - \frac{1}{2\sqrt{\sigma}}G\eta_t u_1(\xi, \eta, \tau) = 0, \quad (5c)$$

从式(4a)直接能得到:

$$\tau = \tau(t), \quad (6)$$

它只是单变量 t 的任意函数. 从式(5a)的第1个方程可以算出:

$$\xi = \tau_t^{1/3}x + \xi_0(y, t), \quad (7)$$

而从式(4b)可得到:

$$\eta = \tau_t^{2/3}y + \alpha(t), \quad (8)$$

其中: $\alpha = \alpha(t)$, $\xi_0 = \xi_0(y, t)$ 是相应变量的任意函数.

由式(5a)的第2个方程可得:

$$G = G_0 \exp\left(\frac{1}{9\sqrt{\sigma}}(2(\ln \tau_t)_t y + 3\alpha_t \tau_t^{-2/3})x\right), \quad (9)$$

其中: $G_0 \equiv G_0(y, t)$ 是 $\{y, t\}$ 的函数.

再把方程(7)和(9)代入式(4c)可得:

$$\xi_0 = -\frac{2}{9}\frac{y^2\tau_{tt}}{\sigma\tau_t^{2/3}} - \frac{2}{3}\frac{\alpha_t y}{\sigma\tau_t^{1/3}} + \beta, \quad (10)$$

其中: β 是 t 的任意函数.

很显然, 式(4d)给出了 u 和 u' 之间的变换关系:

$$u' = -\frac{2}{9}\frac{x\tau_{tt}}{\tau_t} + \tau_t^{2/3}u - \frac{4\tau_{tt}^2 y^2}{81\sigma\tau_t^2} - \frac{4\tau_{tt}\alpha_t y}{27\sigma\tau_t^{5/3}} - \frac{\alpha_t^2}{9\sigma\tau_t^{4/3}} - \frac{\sqrt{\sigma}G_{0y}}{G_0}, \quad (11)$$

剩下的2个方程(5b)和(5c), 我们选定 G_0 的形式为:

$$G_0 = G_1(t) e^{\frac{\sqrt{\sigma}y}{81}\left(9\tau_t^{-\frac{4}{3}}(\alpha_t^2 + 6\sigma\tau_t\beta_t) + 6\tau_t^{-\frac{5}{3}}(2\alpha_t\tau_{tt} - 3\tau_t\alpha_{tt})y - 4(\ln(\tau_t))_{tt}y^2\right)}, \quad (12)$$

这就自然满足式中 $G_1 \equiv G_1(t)$ 是 t 的任意函数.

这样我们就得到了和文献[9]中一样的KP方程的有限变换群定理.

定理1 如果 $u = u(x, y, t)$ 是KP方程(1)的一个解, 那么由式(13)表示的 u' 也是KP方程的一个解.

$$u' = \tau_t^{2/3}u(\xi, \eta, \tau) - \frac{16}{81}\frac{(\tau_{tt}y)^2}{\sigma\tau_t^2} - \frac{4}{9}\frac{\tau_{tt}y\alpha_t}{\sigma\tau_t^{5/3}} - \frac{2}{9}\frac{\alpha_t^2}{\sigma\tau_t^{4/3}} - \frac{2}{9}\frac{x\tau_{tt}}{\tau_t} + \frac{4}{27}\frac{y^2\tau_{tt}}{\sigma\tau_t} + \frac{4}{9}\frac{y\alpha_{tt}}{\sigma\tau_t^{2/3}} - \frac{2}{3}\frac{\beta_t}{\tau_t^{1/3}}, \quad (13)$$

其中:

$$\xi = \tau_t^{1/3}x - \frac{2}{9}\frac{y^2\tau_{tt}}{\sigma\tau_t^{2/3}} - \frac{2}{3}\frac{\alpha_t y}{\sigma\tau_t^{1/3}} + \beta, \quad (14)$$

$$\eta = \tau_t^{2/3}y + \alpha, \quad \tau = \tau(t),$$

且 $\{\alpha, \beta, \tau\}$ 均为 t 的任意函数.

定理的证明很简单, 直接代入验证即可.

注1 决定方程组(4)和(5)的非线性形式是唯一的. 在求解过程中, 首先从简单的线性方程(4a)解出 τ 函数, 只要找到 τ 函数, 则关于 ξ 的方程(式(5a)的第1个方程)就等价于 $\xi_x = \tau_t^{1/3}$. 这样就可以得到 ξ 的表达式, 那么相应的关于 η 的方程(4b)及关于 G 的方程(式(5a)的第2个方程)都是线性的. 式(4c)只是关于 ξ_0 函数的方程, 显然式(4d)也是 u 和 u' 的线性形式. 一旦方程(4)和(5)中的其他方程确定,

方程(5c)就成为一个恒等式, 因而方程(5b)对于函数 G_0 就是线性的. 虽然这个结果与经典的结果相比也不足为奇, 但是, 这里得到的结果比用传统方法得到的结果要简洁很多.

为了用定理1得到传统给出的那些对称, 只需要把任意函数式(14)取如下形式即可:

$$\tau = t + \epsilon f(t), \alpha = \epsilon g(t), \beta = \epsilon h(t), \quad (15)$$

其中: ϵ 是无穷小参数, 则方程(13)就成为:

$$\begin{aligned} u' = u + \epsilon \sigma(u) + O(\epsilon^2), \quad (16) \\ \sigma(u) = \left(\frac{1}{3} \dot{f}(t) - \frac{2}{9} \sigma y^2 \ddot{f}(t) - \frac{2}{3} \sigma \dot{g}(t) y + h(t) \right) u_x + \\ \left(\frac{2}{3} y \dot{f}(t) + g(t) \right) u_y + f(t) u_t + \frac{2}{3} \dot{f}(t) u - \\ \frac{2}{9} x \ddot{f}(t) + \frac{4}{27} \sigma y^2 \ddot{f}(t) + \\ \frac{4}{9} \dot{g}(t) y + \frac{2}{3} \dot{h}(t). \quad (17) \end{aligned}$$

显然方程(17)与经典的结果是等价的. 换句话说, KP 方程经典的对称群的复杂表达式与定理1中任意函数取方程(15)时给出的简洁形式完全等价. 这种方法对很多模型都成立.

修正的 CK 直接法对于很多系统都是有效的, 下面我们来看看在可积系统中的应用.

2 修正的 CK 直接法求解 KP 方程

自 19 世纪 90 年代, Lie^[10]开创性地提出了连续的变换群定义, 并且用它来求解微分方程, 这一刻便奠定了 Lie 群理论的里程碑地位. 在过去的半个多世纪里, Lie 群理论及其方法已成为数理领域的一把利器^[11-13]. 近年来, 各种各样求解偏微分方程特解的方法如雨后春笋般层出不穷, 且这些特解是经典 Lie 方法得不到的. 正如 Olver 和 Rosenau^[14]所说, 经典的和非经典的方法中都暗藏着某种形式的群不变性. Lie 给出的方法, 只是一个单纯的代数过程, 可以求出给定的偏微分方程的对称群. Lie 群变换的引入, 使方程的自变量和因变量空间上相应的精确解具有不变性. 随后, Noether^[15]在 Lie 群变换中引入因变量的导数变量, 进而推广了 Lie 方法. 经典意义下的对称, 使偏微分方程得到简化形式, 使得求解更加方便. 另外, 用 Lie 方法也可以得到群作用下的不变解(也称为相似解), 它

们在整个对称群的子群作用下保持不变. 后来, Bluman 和 Cole^[16]给出了非经典方法, 这种方法可以找到给定偏微分方程的条件对称. 理论表明, 这样得到的变换只是对解的子集具有不变性. 需要说明的是, 经典对称是非经典的, 而反之不然. Olver 等^[17]对此做了详尽说明. 再后来, Clarkson 和 Kruskal^[18]提出了求对称约化的直接方法(也称为 CK 直接法). 前面那些对称都可以只通过代数的方法得到^[19].

在文献[18]中, Clarkson 和 Kruskal 引入了直接法, 用于求偏微分方程的相似约化, 并且成功地应用到了 Boussinesq 方程. 他们的主要想法是寻求给定偏微分方程下面形式的约化:

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, \dots, x_n) = W(x_1, x_2, \dots, x_n, \\ U(z_1, z_2, \dots, z_m)), \quad (z_i = z_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ i = 1, 2, \dots, m < n), \quad (18) \end{aligned}$$

这种形式的约化是最为一般的形式^[20]. 对于给定的偏微分方程:

$$F(x_i, u, u_{x_i}, u_{x_i x_j}, \dots, i, j = 1, 2, \dots, n) = 0, \quad (19)$$

将方程(18)代入到方程(19), 我们要求得到的结果是 $U(z_1, z_2, \dots, z_m)$ 的低维的偏微分方程(也可能是常微分方程), 利用 W 、 z_i 及其导数满足的条件, 从而可以解出 W 和 z_i .

事实上, 对于绝大多数的实际自然系统, 常用以下简单形式的约化取代前面的一般形式(式(18)).

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) + \\ \beta(x_1, x_2, \dots, x_n) U(z_1, z_2, \dots, z_m). \quad (20) \end{aligned}$$

实际上, CK 直接法表明, 不用群理论, 只需要用简单而直接的代数方法就可以求得各种模型的 Lie 点对称群.

实现这种目标并不很困难, 只要把下面式子:

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, \dots, x_n) = W(x_1, x_2, \dots, x_n, \\ U(X_1, X_2, \dots, X_n)), \\ (X_i = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = 1, 2, \dots, n), \quad (21) \end{aligned}$$

代入方程(19)中, 并且要求 U 在 $\{u, x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \{U, X_1, \dots, X_n\}$ 的变换下满足同样形式的偏微分方程即可. 我们的核心思想是对原有的 CK 直接法作 2 处修正: (1) 自变量保持不变. (2) 原方法是降维约化, 我们的方法是直接求原方程的对称群. 下文将

该方法称为修正的CK直接法.

这里, 我们仅限于研究一些(2+1)维模型有如下形式的对称群:

$$u(x, y, t) = \alpha + \beta U(\xi, \eta, \tau), \quad (22)$$

其中: $\alpha, \beta, \xi, \eta, \tau$ 是 x, y, t 的函数, 这些函数可通过要求 $U(\xi, \eta, \tau)$ 在变换 $\{u, x, y, t\} \rightarrow \{U, \xi, \eta, \tau\}$ 下满足和 $u = u(x, y, t)$ 满足的方程一样的方程来确定.

与 Lax 对的方法一样, 我们先以著名的 KP 方程(1)为例来说明这种方法. 在文献[21]中, David 等已经用传统的 Lie 群方法研究了 KP 方程的 Lie 点对称群. 同时, KP 方程广义的 w_∞ 对称代数也由文献[22]给出, 文献[23-24]给出了其对称约化.

首先证明对于 KP 方程用下面的特殊形式:

$$u = \alpha + \beta U(\xi, \eta, \tau), \quad (23)$$

代替下面的一般形式是可行的,

$$u = W(x, y, t, U(\xi, \eta, \tau)), \quad (24)$$

其中: $\alpha, \beta, \xi, \eta, \tau$ 是 x, y, t 的函数.

将方程(24)代入方程(1), 并要求 $U(\xi, \eta, \tau)$ 仍是 KP 方程的解, 只不过其中的变量为新变量(相当于做了变换, 利用 KP 方程消去 $U_{\xi\tau}$ 及其高阶导数), 进而有:

$$\begin{aligned} & -4W_{U\xi}\xi\tau^3U_{\xi^{10}} + G(x, y, t, U, U_\xi, \dots, \\ & U_{\xi^9}, U_\eta, U_\tau, \dots) = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

其中: $U_{\xi^n} \equiv \partial^n U / \partial \xi^n$, G 是一个与 $U_{\xi^{10}}, U_{\xi\tau}$ 及它们的高阶导数无关的冗长的函数. 要使方程(25)对任意的解 U 恒成立, 只要 U 的各阶导数的系数多项式恒为零即可.

显然, W_U 非零, 也可以证明 $\xi_x = 0$ 没有非平凡的解, 消去 $U_{\xi^{10}}$ 的系数可得到:

$$\tau_x = 0, \text{ i.e. } \tau \equiv \tau(y, t), \quad (26)$$

利用式(26), 方程(25)可以简化为:

$$\begin{aligned} & W_U(3\tau_y^2U_{\tau\tau} + \eta_x^4U_{\eta^4}) + G_1(x, y, t, U, U_\xi, \dots, \\ & U_{\xi^4}, U_\eta, U_\tau, \dots) = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

其中: G_1 是一个与 $U_{\tau\tau}$ 和 U_{η^4} 无关的复杂函数. 消去 $U_{\tau\tau}$ 和 U_{η^4} 的系数可得:

$$\tau \equiv \tau(t), \quad \eta \equiv \eta(y, t), \quad (28)$$

利用上述结果, 方程(28)可以将方程(27)进一步化简为:

$$\begin{aligned} & W_{UU}\xi_x^4U_{\xi\xi}^2 + G_2(x, y, t, U, U_\xi)U_{\xi\xi} + \\ & G_3(x, y, t, U, U_\xi, U_{\xi^3}, U_{\xi^4}, \\ & U_\eta, U_{\eta\eta}, U_\tau, U_{\xi\eta}) = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

其中: G_2 和 G_3 只是相应变量的函数. 消去 $U_{\xi\xi}$ 的系数, 即 W_{UU} , 表明只使用简单形式(方程(23))和使用一般形式(方程(24))一样可以找到 KP 方程的一般对称群.

将方程(23)和(28)代入 KP 方程很容易求出:

$$\xi = C_1\tau_t^{1/3}x - \frac{1}{18}C_1\tau_t^{-2/3}\tau_{tt}y^2 - \frac{\delta\eta_{0t}y}{6C_1\tau_t^{1/3}} + \xi_0, \quad (30)$$

$$\eta = \delta C_1^2\tau_t^{2/3}y + \eta_0, \quad \beta = C_1^2\tau_t^{2/3}, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{1}{18}(\ln \tau_t)_t x - \frac{(3\tau_t\tau_{tt} - 4\tau_{tt}^2)y^2}{324\tau_t^2} - \\ & \frac{C_1\delta y\tau_t^{1/3}\left(\frac{\eta_{0t}}{\tau_t}\right) + \frac{C_1^2(\eta_{0t}^2 + 12\xi_{0t}\tau_t)}{72\tau_t^{4/3}}}{36}, \end{aligned} \quad (32)$$

其中: $\xi_0 \equiv \xi_0(t)$, $\eta_0 \equiv \eta_0(t)$, $\tau \equiv \tau(t)$ 都是时间 t 的任意函数, 离散常数 δ 和 C_1 的值由式(33)确定:

$$\delta = \pm 1, C_1 = 1, -\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3}), (i = \sqrt{-1}), \quad (33)$$

由此可以得到如下定理.

定理2 如果 $U = U(x, y, t)$ 是 KP 方程(1)的一个解, 则

$$\begin{aligned} u = & \frac{1}{18}(\ln \tau_t)_t x - \frac{(3\tau_t\tau_{tt} - 4\tau_{tt}^2)y^2}{324\tau_t^2} - \\ & \frac{C_1\delta y\tau_t^{1/3}\left(\frac{\eta_{0t}}{\tau_t}\right) + \frac{C_1^2(\eta_{0t}^2 + 12\xi_{0t}\tau_t)}{72\tau_t^{4/3}}}{36} + \\ & C_1^2\tau_t^{2/3}U(\xi, \eta, \tau) \end{aligned} \quad (34)$$

也是 KP 方程的解. 变量为式(30)和(31), 其中 ξ_0, η_0 和 τ 是 t 的任意函数, 离散常数 δ 和 C_1 的值由式(33)给出.

从定理 2 可以看出, 对于实的 KP 方程, 对称群其实包含 2 个部分:

其一对应于

$$\delta = C_1 = 1 \quad (35)$$

的 Lie 点对称群.

其二对应于

$$\delta = -1, C_1 = 1 \quad (36)$$

的等价于 y 的反射变换, 即 $y \rightarrow -y$ 伴随一般的 Lie

点对称变换. 换言之, 如果记实值KP方程的Lie点对称群为 $\mathcal{S}$, y 的反射记做 σ^y , 恒等变换记做 I , 离散群的反射群记做 $\mathcal{C}_2 = \{I, \sigma^y\}$, 则定理2给出了实值KP方程的完整的Lie对称群 $\mathcal{G}_{\text{RKP}}$ 表示为:

$$\mathcal{G}_{\text{RKP}} = \mathcal{C}_2 \otimes \mathcal{S}, \quad (37)$$

对于复的KP方程, 其对称群就被分为6个部分:

$$\delta = 1, C_1 = 1, \quad (38)$$

$$\delta = 1, C_1 = \frac{1}{2}(i\sqrt{3} - 1), \quad (39)$$

$$\delta = 1, C_1 = \frac{1}{2}(i\sqrt{3} + 1), \quad (40)$$

$$\delta = -1, C_1 = 1, \quad (41)$$

$$\delta = -1, C_1 = \frac{1}{2}(i\sqrt{3} - 1), \quad (42)$$

$$\delta = -1, C_1 = \frac{1}{2}(i\sqrt{3} + 1), \quad (43)$$

与定理2中的部分相对应. 定理2给出了复值KP方程的完整的对称群 $\mathcal{G}_{\text{CKP}}$, 它是由Lie点对称群 $\mathcal{S}$ (定理2中取式(38))和离散群 $\mathcal{D}_3$ 的积构成:

$$\mathcal{G}_{\text{CKP}} = \mathcal{D}_3 \otimes \mathcal{S}, \quad (44)$$

$$\mathcal{D}_3 \equiv \{I, \sigma^y, R_1, R_2, \sigma^y R_1, \sigma^y R_2\}, \quad (45)$$

其中: I 是恒等变换; σ^y 是 y 的反射且

$$R_1: u(x, y, t) \rightarrow -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})u \cdot \left(\frac{1}{2}(i\sqrt{3} - 1)x, -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})y, t \right),$$

$$R_2: u(x, y, t) \rightarrow \frac{1}{2}(i\sqrt{3} - 1)u \cdot$$

$$\left(-\frac{1}{2}(i\sqrt{3} + 1)x, \frac{1}{2}(i\sqrt{3} - 1)y, t \right),$$

如前所述, 定理2中KP方程的特殊群——Lie点对称群的复杂的等价形式已经在文献[25]中给出. 要想从定理2中, 在式(38)下得到传统方法得到结果的等价形式, 只要取

$$\tau(t) = t + \epsilon f(t), \xi_0(t) = \epsilon g(t),$$

$$\eta_0(t) = \epsilon h(t), \delta = 1, C_1 = 1,$$

其中: ϵ 为无穷小参数, 则式(34)就可以写成:

$$u = U + \epsilon \sigma(U) + O(\epsilon^2),$$

$$\sigma(U) = \left(-\frac{1}{6}g_i(t)y + h(t) + \frac{1}{3}f_i(t)x - \right.$$

$$\left. \frac{1}{18}f_{ii}(t)y^2 \right) U_x + \left(\frac{2}{3}yf_i(t) + g(t) \right) U_y + f(t)U_t + \frac{2}{3}f_i(t)U + \frac{1}{36}yg_{ii}(t) - \frac{1}{18}f_{ii}(t)x - \frac{1}{6}h_i(t) + \frac{1}{108}f_{iii}(t)y^2,$$

上述对称的等价向量场为:

$$V = \left\{ \left(\frac{1}{3}f_i(t)x - \frac{1}{18}f_{ii}(t)y^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2}{3}yf_i(t) \frac{\partial}{\partial y} + f(t) \frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{1}{18}f_{ii}(t)x - \frac{1}{108}f_{iii}(t)y^2 - \frac{2}{3}f_i(t)U \right) \frac{\partial}{\partial U} \right\} + \left\{ -\frac{1}{6}g_i(t)y \frac{\partial}{\partial x} + g(t) \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{36}g_{ii}(t)y \frac{\partial}{\partial U} \right\} + \left\{ h(t) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{6}g_i(t) \frac{\partial}{\partial U} \right\} \equiv V_1(f(t)) + V_2(g(t)) + V_3(h(t)),$$

这个结果与标准Lie方法得到的结果完全相同, 进而可以求解下面的KP型方程:

$$c_1 u_{8x} + c u_{2x} u_{4x} - c_2 u_{3x} u_{xy} + \frac{3}{2} u_{2x} u_x^2 + \frac{3}{2} u_{2x}^2 \frac{3\delta}{4} u_{2y} u_{2x} + c_2 u_{2x} u_{2xy} + u_{2x} u_{xt} = 0, \quad (46)$$

在规范变换

$$x = X, y = Y, t = -4T,$$

及 $\delta = -1, c = -1/4$ 下, 方程(46)可化为:

$$u_{2x} (u_{XT} + (u_{3X} - 6u u_X)_X + 3u_Y) + c_1 u_{8X} + c_2 (u_{2x} u_{2XY} - u_{XY} u_{3X}) = 0, \quad (47)$$

显然, 当 $c_1 = 0, c_2 = 0$ 时, 式(47)化为 KP 方程(1), 我们可以利用上述 2 个定理进行求解. 当 $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$ 时, 只需要再加一个条件:

$$c_1 u_{8X} + c_2 (u_{2x} u_{2XY} - u_{XY} u_{3X}) = 0,$$

然后利用上述定理即可求其对称及精确解. 当然, 也可以使用前述 2 种方法直接求解, 由于方程复杂, 计算会相对麻烦.

3 总结与讨论

本文所做的主要工作是:

(1) 探寻新的求对称思路. 从 Lax 入手对 Lax 对可积的模型进行了讨论, 以 KP 方程为典型实例, 对传统的做法进行了回顾, 同时也可以看出, 用传

统方法可以得到结果, 但是结果较为复杂, 因而很难在实际中应用. 我们的想法是从 Lax 对入手, 利用假定的 Ansatz 代入原来的 Lax 对, 让新的变元与原来的变元满足一样形式的 Lax 方程, 利用已有的条件消去高阶导数项可以得到一系列的确定方程, 并解出这些方程组, 进而可以得到关于可积模型的有限变换群定理. 得到的结果包含了传统方法得到的结果, 且形式上简单很多. 更进一步, 这种方法也可分别应用到 sine-Gordon 方程、DS 方程、Camassa-Holm 方程、DLW 方程、ANNV 方程及 NNV 方程中, 且对 sine-Gordon 方程及 DLW 方程给出了局域激发结构^[26-29].

(2) 将 CK 直接法加以修正, 使其可以用以求对称群. 对于 CK 直接法, 传统的做法是在某种约束的要求下使得原来的模型从高维情况(例如从(2+1)维)约化得到低维相似约化方程(例如(1+1)维或者直接约化到常微). 显而易见, 增加或减弱约束条件可以得到新的结果. 由于原约束的提出并不是唯一不可变的, 所以首先想到了利用直接法去做, 我们只要求在有限变换后新的变量也满足与原来变量一样的方程, 然后利用确定方程来求出相关的待定函数, 进而求出系统的对称群及代数.

总之, 本文从另外的角度用2种新颖而简洁的方法探讨了非线性系统的对称与严格解, 用 Lax 对很简单地对 Lax 可积的体系进行了讨论, 同时也用修正的 CK 直接法讨论了非线性系统. 这种修正的 CK 直接方法的优势在于它不但适用于可积系统, 而且对于不可积系统也显示出极大的威力. 近几年来被很多同行所引用, 并在其他系统中得以应用^[30-34]. 当然, 在文中我们没有涉及到离散形式的非线性系统, 因此, 这2种方法在离散系统、变系数及分数维系统上的应用还有待进一步研究.

参考文献:

- [1] Lax P D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1968, 21(5):467-490.
- [2] Zakharov V E, Shabat A. Exact theory of two-dimensional self-focussing and one-dimensional self-modulating waves in nonlinear media[EB/OL]. [2020-01-11]. <https://www.researchgate.net/publication/256198414>.
- [3] Wadati M. The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation[J]. *Journal of the Physical Society of Japan*, 1972, 32(6):1681-1688.
- [4] Ablowitz M J, Kaup D J, Newell A C, et al. The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems[J]. *Studies in Applied Mathematics*, 1974, 53(4):249-315.
- [5] Wahlquist H D, Estabrook F B. Prolongation structures of nonlinear evolution equations[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1975, 16(1):1-7.
- [6] Orlov A Y, Schulman E I. Additional symmetries of the nonlinear Schrödinger equation[J]. *Theoretical and Mathematical Physics*, 1985, 64(2):862-866.
- [7] Orlov A Y, Schulman E I. Additional symmetries for integrable equations and conformal algebra representation [J]. *Letters in Mathematical Physics*, 1986, 12:171-179.
- [8] Orlov A Y, Winternitz P. Algebra of pseudodifferential operators and symmetries of equations in the Kadomtsev-Petviashvili hierarchy[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1997, 38(9):4644-4674.
- [9] Lou S Y, Tang X Y. Equations of arbitrary order invariant under the Kadomtsev-Petviashvili symmetry group[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2004, 45(3):1020-1030.
- [10] Lie S. Theories der Transformation Gruppen III[M]. Teubner Leipzig: Dritter und Letzter Abschnitt, 1893.
- [11] Bluman G W, Kumei S. Symmetries and differential equations[M]. New York: Springer, 1989.
- [12] Ibragimov N. CRC handbook of Lie group analysis of differential equations: Symmetries, exact solutions and conservation laws[EB/OL]. [2020-01-11]. <https://www.researchgate.net/publication/230675356>.
- [13] Ovsiannikov L V. Group analysis of differential equations[EB/OL]. [2020-01-11]. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-531680-4.50012-5>.
- [14] Olver P J, Rosenau P. The construction of special solutions to partial differential equations[J]. *Physics Letters A*, 1986, 114(3):107-112.
- [15] Noether E. Invariante variations probleme[J]. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1918, 2:235-257.
- [16] Bluman G W, Cole J D. The general similarity solution of the heat equation[J]. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 1969, 18:1025-1042.
- [17] Olver F W J, Lozier D W. NIST Handbook of Mathematical Functions[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.
- [18] Clarkson P A, Kruskal M D. New similarity reductions of the Boussinesq equation[J]. *Journal of Mathematical*

- Physics, 1989, 30(10):2201-2213.
- [19] K gler P. A parameter identification problem of mixed type related to the manufacture of car windshields[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2004, 64(3): 858-877.
- [20] Bluman G W, Cole J D. Similarity methods for differential equations[M]. New York: Springer, 1974.
- [21] David D, Kamran N, Levi D, et al. Subalgebras of loop algebras and symmetries of the Kadomtsev-Petviashvili equation[J]. Physical Review Letters, 1985, 55(20):2111-2113.
- [22] Lou S Y. Symmetries of the Kadomtsev-Petviashvili equation[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1993, 26(17):4387-4394.
- [23] Lou S Y. Similarity solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1990, 23(13):L649-L654.
- [24] Clarkson P A, Winternitz P. Nonclassical symmetry reductions for the Kadomtsev-Petviashvili equation[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1991, 49(3):257-272.
- [25] Champagne B, Winternitz P. On the infinite-dimensional symmetry group of the Davey-Stewartson equations[J]. Journal of Mathematical Physics, 1988, 29(1):1-8.
- [26] Lou S Y, Ma H C. Finite symmetry transformation groups and exact solutions of Lax integrable systems[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2006, 30(4):804-821.
- [27] Ma H C, Lou S Y. Solutions generated from the symmetry group of the (2+1)-dimensional sine-Gordon system[J]. Zeitschrift F r Naturforschung A, 2005, 60(4):229-236.
- [28] Ma H C, Lou S Y. Finite symmetry transformation groups and exact solutions of Lax integrable systems[J]. Communications in Theoretical Physics, 2005, 44(2): 193-196.
- [29] Lou S Y, Ma H C. Non-Lie symmetry groups of (2+1)-dimensional nonlinear systems obtained from a simple direct method[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2005, 38(7):L129-L137.
- [30] Ma H C, Lou S Y, Deng A P. Lie symmetry groups of (2+1)-dimensional BKP equation and its new solutions[J]. Communications in Theoretical Physics, 2008, 50(3): 685-688.
- [31] Ma H C, Lou S Y, Deng A P. Lie symmetry groups of high dimensional non-integral nonlinear systems[EB/OL]. [2020-01-11]. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1-7426596/96/1/012166/pdf>.
- [32] Ma H C, Deng A P, Yu Y D. Lie symmetry group of (2+1)-dimensional Jaulent-Miodek equation[J]. Thermal Science, 2014, 18(5):1547-1552.
- [33] Ma H C, Qin Z Y, Deng A P. Symmetry transformation and new exact multiple kink and singular kink solutions for (2+1)-dimensional nonlinear models generated by the Jaulent-Miodek hierarchy[J]. Communications in Theoretical Physics, 2013, 59(2):141-145.
- [34] Ma H C, Qin Z Y, Deng A P. Lie symmetry and exact solution of (2+1)-dimensional generalized Kadomtsev-Petviashvili equation with variable coefficients[J]. Thermal Science, 2013, 17(5):1490-1493.

New methods for finding symmetry groups of nonlinear systems

MA Hongcai^{1,2}

(1.College of Science, Donghua University, Shanghai 201620, China;

2.Institute of Nonlinear Sciences, Donghua University, Shanghai 201620, China)

Abstract: At first, we obtain the symmetry and exact solution of nonlinear integral system using Lax pair which can be used to solve many (2+1)-dimensional integral systems in a simple and convenient way as observed from the KP equation. In addition, we use the modified CK direct method to acquire the symmetry and exact solution which can be applied in both integral and non-integral systems. Along with this process, the discrete group can be obtained for dealing with the high dimensional system.

Key words: symmetry; exact solution; symmetry group; B cklund transformation; Lax pairs; CK direct method; nonlinear superposition formula

(责任编辑 史小丽)