

位移浅水波系统

刘 萍

(电子科技大学中山学院 电子信息学院, 广东 中山 528402)

摘要: (1+1)维位移浅水波系统(1DDSWWS)是结合流体力学和变分原理, 运用拉格朗日坐标而构造的浅水波方程. 综合流体在 3 个维度空间上的能量, 将 1DDSWWS 推广, 可推导出(2+1)维位移浅水波系统(2DDSWWS). 2DDSWWS 的严格解可表示为椭圆函数积分, 这个椭圆函数积分可退化为雅可比椭圆周期函数解和孤立波解. 2DDSWWS 的水面具有各种不同形态的孤子激发模式, 我们在 2DDSWWS 模型中也发现了孤子分子. 借用量纲分析的方法添加流体黏性项, 可以对理想的(2+1)维位移浅水波系统进行修正, 建立修正的 2DDSWWS 模型. 当黏性系数为零时, 修正模型将退化成理想模型. 修正的 2DDSWWS 模型的严格解可以很清晰地展示流体的黏性对流体运动的影响. 在连续性方程中保留高阶项, 重构拉格朗日函数, 可以得到全非线性(2+1)维位移浅水波系统(FN2DDSWWE). 在低阶近似下, 忽略某些高阶项, FN2DDSWWE 可以退化成 2DDSWWS 模型.

关键词: 位移浅水波系统; 孤子分子; KP 方程; 严格解; 黏性

中图分类号: O411

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2020) 05-0039-06

1 (1+1)维位移浅水波系统

关于浅水波系统, 人们已开展了很多研究. 最引人注意的浅水波方程, 便是著名的 KdV 方程^[1]. 这些浅水孤立波方程, 一般是借助于欧拉坐标建立. 2006 年, 钟万勰等^[2]借助拉格朗日坐标, 运用变分原理, 建立了如下形式的浅水孤立波方程:

$$q_{tt} - (h^2/3)q_{xxt} + gh(3q_x - 1)q_{xx} = 0, \quad (1)$$

其中: q 是 x 和 t 的函数, 表示流体在水平方向的位移.

在这个浅水波方程的推导建立过程中, 被选为广义坐标的是位移, 所以这个方程也称为位移浅水波系统((1+1)-Dimensional Displacement Shallow Water Wave System, 简称1DDSWWS).

1DDSWWS 模型的孤立波速度比 KdV 模型的孤立波速度要略小, 而且 1DDSWWS 模型的孤立波波宽 $\sqrt{4h^2(h+\eta_0)/(3\eta_0)}$ 比 KdV 模型的孤立波波宽 $\sqrt{4h^3/(3\eta_0)}$ 要略大, 即 1DDSWWS 模型的能量更加分散. 当 η_0/h 取值较小时, 这 2 个模型的孤

立波经过较长时间的演化, 会非常接近. 而当 η_0/h 取值较大时, 则两者的区别较大. 由于这 2 个模型在推导过程中均运用了浅水波的近似条件 $\eta_0/h \ll 1$, 所以 η_0/h 不宜取较大值. 与实际的孤立波速度相比, KdV 模型孤立波速度偏大, 而 1DDSWWS 模型的孤立波速度比 KdV 模型的孤立波速度要略小, 所以 1DDSWWS 模型的孤立波速度更加接近实际的孤立波速度. 文献[3]展示了 1DDSWWS 的保辛性. 由此表明, 1DDSWWS 是一个很重要的浅水孤立波模型.

作为 2 个不同的(1+1)维浅水孤立波系统, 1DDSWWS 模型和 KdV 方程也有一定的关联性. 在长波近似下, 1DDSWWS 模型可退化演变成 KdV 方程^[4]. 文献[4]研究了 1DDSWWS 的对称性和对称约化, 发现其具有时空平移不变性、时空反演不变性和标度变换不变性.

2 (2+1)维位移浅水波系统

与 KdV 方程相比, 1DDSWWS 的孤立波速度

与实际孤立波速度更为接近, 这是一个具有启发性的结果, 文献[5]将这一结果推广到耦合(2+1)维位移浅水波系统((2+1)-Dimensional Displacement Shallow Water Wave System, 简称2DDSWWS). 与1DDSWWS 类似, 人们提出了多个描述(2+1)维浅水波的模型, 例如著名的 Kadomtsev-Petviashvili (KP)方程^[6-8]. KP 方程在 x 和 y 两个方向上的变量地位不对等, 且它的孤立波与实际孤立波相比, 速度偏大. 下面将介绍 2DDSWWS 的构造和性质^[5].

2.1 2DDSWWS 的建立

浅水波方程的推导是建立在流体密度恒定, 没有黏性这一条件上, 不考虑水的旋转, 而且表面能忽略不计. 水的表面演化化为 $z=\zeta(x,y,t)\equiv\zeta$, 而底平面表示为 $z=-h$. 连续性方程为^[5]:

$$(h+\zeta)((1+s_x)\delta x)((1+w_y)\delta y)=h\delta x\delta y, \quad (2)$$

式中: s 和 w 表示水在水平方向 x 和 y 方向的位移, 它们是 x, y, t 的函数, 与竖直方向无关. 方程(2)可表达成:

$$\zeta = -h \frac{\beta}{1+\beta}, \quad (3)$$

式中: $\beta = s_x + w_y + s_x w_y$.

水平方向的动能为:

$$T_1 = \int_{-L_1}^{L_1} \int_{-L_2}^{L_2} \frac{\rho h(s_t^2 + w_t^2)}{2} dx dy, \quad (4)$$

水被假定为在一个长方形区域内运动, 即 $-L_1 < x < L_1$, $-L_2 < y < L_2$. 对孤立波而言, L_1 和 L_2 可考虑为无限大.

综合边界条件和连续性方程的约束, 竖直方向水的速度可近似为沿着竖直方向线性增加^[9], 则竖直方向水的动能为:

$$T_2 = \frac{1}{6} \rho \int_{-L_1}^{L_1} \int_{-L_2}^{L_2} (1+\beta)(h+\zeta)\zeta_t^2 dx dy = \frac{1}{6} \rho h \int_{-L_1}^{L_1} \int_{-L_2}^{L_2} \zeta_t^2 dx dy, \quad (5)$$

势能为:

$$U = \int_{-L_1}^{L_1} \int_{-L_2}^{L_2} \frac{1}{2} \rho g (\zeta^2 - h^2) (1+\beta) dx dy,$$

由此得到拉格朗日函数为:

$$L = \frac{\rho h}{2} \int_{-L_1}^{L_1} \int_{-L_2}^{L_2} \left(s_t^2 + w_t^2 + \frac{h^2}{3} u_t^2 \right) dx dy +$$

$$\frac{\rho h^2}{2} \int_{-L_1}^{L_1} \int_{-L_2}^{L_2} (u(s_x^2 + w_y^2 - u)) dx dy, \quad (6)$$

式中: $u = s_x + w_y$.

从拉氏函数式(6)可知, 存在2个广义坐标, 故存在2个如下形式的拉氏方程:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial s_t} - \frac{\partial L}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial w_t} - \frac{\partial L}{\partial w} = 0, \quad (7)$$

将拉氏函数式(6)代到拉氏方程(7)可得到(2+1)维耦合变分系统^[5]:

$$s_{tt} + gh(2s_x + (u-1)u_x) - \frac{h^2}{3} u_{xtt} = 0, \quad (8a)$$

$$w_{tt} + gh(2w_y + (u-1)u_y) - \frac{h^2}{3} u_{ytt} = 0, \quad (8b)$$

方程(8)即为 2DDSWWS. 当 $w=0$, 且 s 仅为 x 和 t 函数(与 y 无关)时, 2DDSWWS 演变为 1DDSWWS.

2.2 2DDSWWS 的椭圆周期解和孤立波解

2.1 节介绍了 2DDSWWS 的推导, 这一节我们将介绍 2DDSWWS 的严格解以及水表面的演化. 对系统(8)的变量做行波变换后, 系统的一般解可表达为椭圆函数积分. 对参数进行一定的约束, 解可表达为:

$$s = a_0 + a_1 \text{cn}^2(\sigma, m), \quad (9a)$$

$$w = b_0 + b_1 \text{cn}^2(\sigma, m), \quad (9b)$$

式中: $\sigma = k_1 x + k_2 y + k_3 t - \sigma_0$; $a_0, a_1, b_0, b_1, k_1, k_2, k_3, \sigma_0$ 和 m 是常数. 当模趋近于1时, 椭圆函数周期波解退化为下列孤立波解:

$$s = a_0 + a_1 \text{sech}^2 \sigma, \quad (10a)$$

$$w = b_0 + b_1 \text{sech}^2 \sigma, \quad (10b)$$

相应地, 水面的演化也可用椭圆积分来表示, 得到水面的周期波或孤立波演化形式.

2.3 从 2DDSWWS 推导 KP 方程

既然 2DDSWWS 模型和 KP 方程都是(2+1)维浅水孤立波系统, 那么这2个模型之间是否存在联系? 下面将推导它们之间的联系^[8].

为了推导 KP 方程, 可应用多重尺度法引入时空慢变量, 令 s 和 w 具有如下形式:

$$s = \phi_1(\varepsilon(x-ct), \varepsilon^2 y, \varepsilon^3 t) = \phi_1(X, Y, T), \quad (11)$$

$$w = \phi_2(\varepsilon(x-ct), \varepsilon^2 y, \varepsilon^3 t) = \phi_2(X, Y, T),$$

这里 ε 是一个任意无穷小参量. 对 2DDSWWS 运用弱二维条件, 即流体运动主要集中在 x 方向上,

y 方向上的运动相对较弱, 因此可以将 $\phi_1 \equiv \phi_1(X, Y, T)$ 和 $\phi_2 \equiv \phi_2(X, Y, T)$ 展开成:

$$\phi_1 = \varepsilon \phi_{11} + \varepsilon^2 \phi_{12}, \quad \phi_2 = \varepsilon^2 \phi_{21} + \varepsilon^3 \phi_{22}, \quad (12)$$

式中: $\phi_{ij} \equiv \phi_{ij}(X, Y, T), i=1, 2, j=1, 2$.

将方程(11)和方程(12)代入方程(8)中, 并将 ε 的各个阶次的系数设置为 0, 2DDSWWS 可退化成 KP 方程.

KP 方程的孤立波解, 在 x 和 y 方向上是非对称的, 只能在单向上运动(正的或负的 x 方向). KP 方程的孤立波比实际观测的水波速度略大. 2DDSWWS 模型的孤立波解在 x 和 y 方向上是对称的, 且在同参数情况下其速度比 KP 方程的孤立波速度略低, 故更加接近实际物理现象. 基于以上考虑, 2DDSWWS 模型是描述(2+1)维浅水波系统一个很好的选择^[5]. 文献[10]研究了 2DDSWWS 的对称性和对称约化.

3 (2+1)维位移浅水波系统的孤子分子

在非线性系统中, 如果几个孤立波传播过程中保持稳定的距离, 犹如分子里的几个原子保持稳定的距离一样, 那么我们称这几个孤立波为孤子分子. 孤子分子已在多个物理学领域的实验中发现, 是一个热门研究问题^[11-12]. 但是对孤子分子的理论研究的报道还较为少见. 下面我们将介绍 2DDSWWS 的水面演化的孤子分子, 得到的结果属首次公开报道.

水面演化的式子为式(3), 其值由 s 和 w 决定. 从 2.2 节可以看到, s 和 w 具有椭圆周期波和孤立波解. 将 s 和 w 的孤立波解代入式(3), 可得到水面的演化形式. 下面各图展示了不同参数下水面的激发模式. 图 1 为水面的孤立波激发模式.

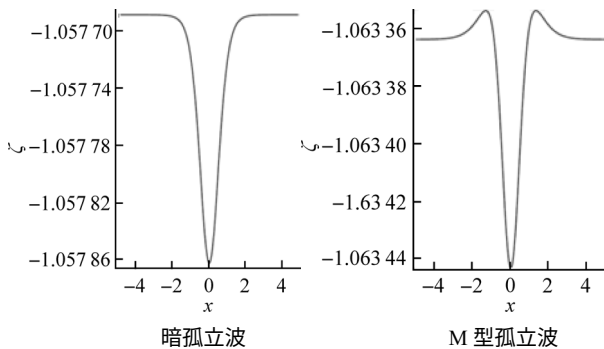


图 1 位移孤立波系统水面的孤立波

图 2 为位移孤立波系统水面的双峰孤子. 图 3 为位移浅水波水面的孤子分子激发模式. 图 4 为孤子分子在水平面的密度图. 从图中可以清晰看到, 2 个孤子之间的距离保持不变.

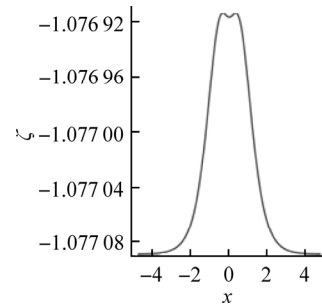
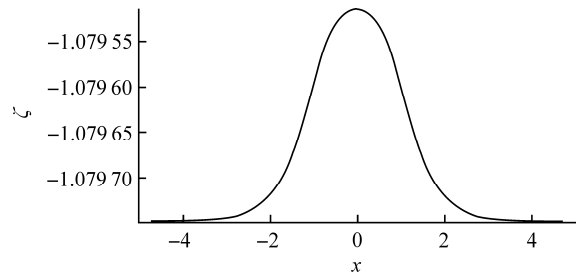
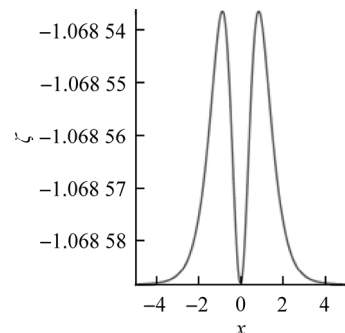


图 2 位移孤立波系统水面的双峰孤子



扭结反扭结孤子分子(波峰、一、二、三阶变化率为 0)



二孤子分子

图 3 位移孤立波系统水面的孤子分子

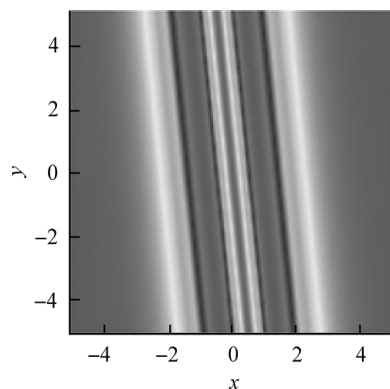


图 4 位移孤立波系统的孤子分子密度

4 修正的(2+1)维位移浅水波系统

需要指出的是: KP 方程和 2DDSWWS 的推导建立过程中的一个共同的假设是流体是恒定密度的无黏性的理想流体. 2DDSWWS 不能描述黏性流体. 下面我们将介绍添加流体的黏性项来修正 2DDSWWS 模型, 提出修正的 2DDSWWS 模型 (Modified 2DDSWWS, 简称为 M2DDSWWS)^[13].

量纲分析是自然科学中一种重要的研究方法, 它根据一切量所必须具有的形式来分析判断事物之间数量关系所遵循的一般规律. 我们将使用量纲分析法添加黏性项, 对理想模型 2DDSWWS 进行修正. 下面我们考虑不可压缩流 Navier-Stokes 方程^[14]:

$$\bar{v}_t + \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} - \nu \Delta \bar{v} + \nabla p = 0, \quad (13)$$

式中: $\bar{v}$ 是速度矢量; p 是压力; ν 是运动学黏性系数.

比较 Navier-Stokes 方程和 2DDSWWS 模型的变量和量纲, 可对理想流体的(2+1)维位移浅水波模型 2DDSWWS 修改成如下形式的 M2DDSWWS 模型:

$$s_{tt} + gh(2s_x + (u-1)u_x) - \frac{h^2}{3}u_{xxt} - \nu(s_{txx} + s_{yy}) = 0, \quad (14a)$$

$$w_{tt} + gh(2w_y + (u-1)u_y) - \frac{h^2}{3}u_{yxt} - \nu(w_{txx} + w_{yy}) = 0. \quad (14b)$$

当 ν 比较小时, 这个方程可以认为是一个扰动的偏微分方程. 类似于(2+1)维, 我们可以对(1+1)维位移浅水波模型 1DDSWWS 修改成如下的修正模型(M1DDSWWS):

$$q_{tt} - \frac{h^2}{3}q_{xxt} + gh(3q_x - 1)q_{xx} - \nu q_{txx} = 0. \quad (15)$$

当考虑的流体为理想流体时, 黏性系数为零, M1DDSWWS 和 M2DDSWWS 将分别退化成 1DDSWWS 和 2DDSWWS.

通过对称约化的方法, 可以得到 M2DDSWWS 的一种形式的严格解为^[13]:

$$s = F_1(y) + k_1 x + k_2 t + \frac{C_1 e^{C_4 \nu t}}{\nu^2} \cos(\sqrt{-C_4} y), \quad (16a)$$

$$w = F_2(x) + k_3 y + k_4 t + \frac{C_3 e^{C_4 \nu t} \cos(\sqrt{-C_4} x)}{(\sqrt{C_4} \nu C_5 - C_2) C_4^{3/2} \nu}, \quad (16b)$$

当 $C_4 < 0$ 时, 流体位移 s 和 w 随时间衰减, 这清晰地展示了黏性对流体运动的影响. 同时, 时空的小扰动也能对流体运动产生很大影响.

5 全非线性(2+1)维位移浅水波系统

2017 年, 钟万勰院士团队对位移浅水波模型进行了发展和完善^[15]. 在 2.1 节 2DDSWWS 的推导建立中, 尽管水平面 x 和 y 方向的位移 s 和 w 都是 (x, y, t) 的函数, 但是在连续性条件式(2)中, s_y 和 w_x 被忽略, 所以这个连续性条件运用了低阶近似. 文献[15]中, 钟万勰院士等考虑了高阶情况, 在连续性条件中 s_y 和 w_x 均不默认为 0. 对于不可压缩流体, 在拉格朗日坐标中, 其连续性方程为:

$$\begin{vmatrix} 1+s_x & s_y & s_z \\ w_x & 1+w_y & w_z \\ v_x & v_y & 1+v_z \end{vmatrix} = 1, \quad (17)$$

式中: s 、 w 和 v 都是 $\{x, y, z, t\}$ 的函数, 分别表示流体在 x 、 y 和 z 方向的位移.

对于浅水波, 文献[15]也假设 s 、 w 与 z 无关. 这样连续性条件可以表示为:

$$\zeta = -h \frac{\alpha}{1+\alpha}, \quad (18)$$

式中: ζ 表示水表面高度, 而

$$\alpha = s_x + w_y + s_x w_y - s_y w_x, \quad (19)$$

比较式(3)和式(18), 可发现它们的主要区别在于式(3)没有 $-s_y w_x$, 而式(18)存在 $-s_y w_x$.

水平和竖直方向的总动能为:

$$T = \frac{1}{2} \rho h \int_{-L_1}^{L_1} \int_{-L_2}^{L_2} \left(s_t^2 + w_t^2 + \frac{1}{3} h^2 \alpha_t^2 \right) dx dy, \quad (20)$$

势能为:

$$U = C - \int_{-L_1}^{L_1} \int_{-L_2}^{L_2} \frac{1}{2} \rho g h^2 \frac{\alpha}{1+\alpha} dx dy, \quad (21)$$

这里 C 是一个常数, 对后续的变分计算没有影响. 运用拉格朗日方程和变分原理, 经过复杂的变分计算后, 可得到如下式子:

$$s_{tt} + \frac{h^2}{3} (\alpha_{ty} w_x - \alpha_{tx} (1 + w_y)) +$$

$$gh(3\alpha-1)(\alpha_x(1+w_y)-\alpha_y w_x)=0, \quad (22a)$$

$$w_{tt} + \frac{h^2}{3}(\alpha_{tx} s_y - \alpha_{ty} (1+s_x)) +$$

$$gh(3\alpha-1)(\alpha_y(1+s_x)-\alpha_x s_y)=0, \quad (22b)$$

这个式子即为全非线性(2+1)维位移浅水波系统(Fully Nonlinear (2+1)-Dimensional Displacement Shallow Water Wave Equation, 简称FN2DDSWWE)^[15]. 运用低阶近似, FN2DDSWWE退化为:

$$s_{tt} + gh(2s_x + (u-1)u_x) - \frac{h^2}{3}u_{xtt} + f_1 = 0, \quad (23a)$$

$$w_{tt} + gh(2w_y + (u-1)u_y) - \frac{h^2}{3}u_{ytt} + f_2 = 0, \quad (23b)$$

式中:

$$f_1 = gh((s_y w_x)_x + (u w_x)_y),$$

$$f_2 = gh((u s_y)_x + (s_y w_x)_y),$$

当 f_1 和 f_2 被忽略, FN2DDSWWE 方程(23)将变成2DDSWWS 方程(8). 文献[15]研究了 FN2DDSWWE 的行波解, 发现在特定参数下可以得到系统的孤立波解.

6 总结和讨论

(1+1)维模型1DDSWWS 的孤立波速度与 KdV 方程的孤立波速度相比, 更靠近实际的孤立波速度. 运用拉格朗日坐标, 可以构造 2DDSWWS 模型. 2DDSWWS 的行波解的一般解可运用椭圆函数积分表示. 当参数进行一定的约束时, 2DDSWWS 的行波解可以用椭圆函数表示, 而当椭圆函数的模为1时, 那么椭圆函数解可以退化为相应的孤立波解.

本文还介绍了 2DDSWWS 的水面的孤子分子. 在不同的参数下, 2DDSWWS 的水面可以呈现出各种暗孤子、双峰孤子、M 型孤子, 也可以呈现出扭结反扭结孤子分子、二孤子分子的激发模式. 从孤子分子的密度演化图, 可以清晰地看到2个孤子之间的距离保持不变. 本文对 2DDSWWS 水面演化的孤子分子方面的研究结果进行了简单综述, 后续将在其他论文中全文详细报道相关内容.

(1+1)维模型 1DDSWWS 和 (2+1)维模型 2DDSWWS 的共同缺点是它们都没有考虑流体的

黏性, 不能描述黏性流体. 我们对 1DDSWWS 和 2DDSWWS 进行了修正, 提出了修正的(1+1)维位移浅水波模型 M1DDSWWS 和(2+1)维位移浅水波模型 M2DDSWWS. M1DDSWWS 和 M2DDSWWS 的最大优点是能描述黏性流体. 对于理想流体, 动力学黏性系数为零, M1DDSWWS 和 M2DDSWWS 将分别退化成 1DDSWWS 和 2DDSWWS. 所得到的 M2DDSWWS 的严格解说明流体在各个方向的位移均随时间衰减, 这充分展示了流体黏性对流体运动的影响.

通过完善连续性方程, 在 2DDSWWS 基础上增加更多的非线性项, 并重新构造拉格朗日函数, 可以得到 FN2DDSWWE. 当运用低阶近似, 并将某些非线性忽略时, FN2DDSWWE 将退化为 2DDSWWS.

从模型 2DDSWWS、M2DDSWWS 以及 FN2DDSWWE 的推导过程可以看到, 在推导过程中运用了很多近似条件. 如何尽可能少而且尽可能准确地在拉格朗日坐标下构造水波系统和浅水波系统, 值得深入探讨. 这几个系统的空间维度均是二维, 竖直方向的自由度没有得到充分体现. 在拉格朗日坐标下, 构造(3+1)维浅水波系统, 是很有意义的研究课题.

参考文献:

- [1] Korteweg D J, de Vries G. XLI. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves[J]. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1895, 39(240):422-443.
- [2] 钟万勰, 姚征. 位移法浅水孤立波[J]. 大连理工大学学报, 2006, 46(1):151-156.
- [3] 钟万勰, 陈晓辉. 浅水波的位移法求解[J]. 水动力学研究与进展(A 辑), 2006, 21(4):486-493.
- [4] Li J L, Liu X Y. Microengineering of soft functional materials by controlling the fiber network formation[J]. The Journal of Physical Chemistry B, 2009, 113(47): 15467-15472.
- [5] Liu P, Lou S Y. A (2+1)-dimensional displacement shallow water wave system[J]. Chinese Physics Letters, 2008, 25(9):3311-3314.
- [6] Lou S Y. Searching for higher dimensional integrable models from lower ones via Painlevé analysis[J]. Physical

- Review Letters, 1998, 80(23):5027-5031.
- [7] Infeld E, Seniorski A, Skorupski A A. Numerical simulations of Kadomtsev-Petviashvili soliton interactions [J]. Physical Review E, 1995, 51(4):3183-3191.
- [8] Kadomtsev B B, Petviashvili V I. On the stability of solitary waves in weakly dispersing media[J]. Soviet Physics Doklady, 1970, 15:539-549.
- [9] Stoker J J. Water Waves[M]. New York: Interscience Publishers, 1957.
- [10] Liu P. Symmetries and similarity reductions of a new (2+1)-dimensional shallow water wave system[J]. Communications in Theoretical Physics, 2008, 49(3): 555-558.
- [11] Liu X M, Yao X K, Cui Y D. Real-time observation of the buildup of soliton molecules[EB/OL]. [2020-01-10]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.121.023905>.
- [12] Wright L G, Christodoulides D N, Wise F W. Spatiotemporal mode-locking in multimode fiber lasers[J]. Science, 2017, 358(6359):94-97.
- [13] Liu P, Fu P K. Modified (2+1)-dimensional displacement shallow water wave system and its approximate similarity solutions[J]. Chinese Physics B, 2011, 20(9):090203.
- [14] Mucha P B A. On the inviscid limit of the Navier-Stokes equations for flows with large flux[J]. Nonlinearity, 2003, 16(5):1715-1732.
- [15] Wu F, Yao Z, Zhong W X. Fully nonlinear (2+1)-dimensional displacement shallow water wave equation [J]. Chinese Physics B, 2017, 26(5):054501.

Displacement shallow water wave system

LIU Ping

(School of Electronic and Information Engineering, University of Electronic Science and Technology of
China Zhongshan Institute, Zhongshan 528402, China)

Abstract: One (1+1)-dimensional displacement shallow water wave system (1DDSWWS) is proposed to model the shallow water waves with Lagrange coordinate. Travelling wave solutions of the 2DDSWWS can be expressed as an elliptic function integral. Under some parameter constraints, the elliptic function integral can be reduced back to elliptic function solutions and solitary wave solutions. There are various soliton evolution patterns on the water surface of the 2DDSWWS. In particular, we succeed in identifying soliton molecules in the 2DDSWWS model. In this paper the displacement system is modified and the term related to the fluid viscosity is added to the model by means of dimensional analysis. For ideal fluids, the modified displacement system will degenerate to displacement system (M2DDSWWS). Some exact solutions of the M2DDSWWS clearly show the role of fluid viscosity. By preserving the higher-order terms in the continuity equation and reconstructing the Lagrangian function, one can obtain the fully nonlinear (2+1)-dimensional displacement shallow water wave equation (FN2DDSWWE). Making use of the low order approximation and neglecting the effect of some low order terms, the FN2DDSWWE can be reduced back to the 2DDSWWS.

Key words: displacement shallow water wave system; soliton molecules; KP equation; exact solutions; viscosity

(责任编辑 史小丽)