

若干高维可积和不可积模型的严格解

胡恒春

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 可积和不可积模型可以描述自然科学中的诸多现象, 寻找高维非线性模型的严格解已成为可积系统的一个重要研究内容. 结合达布变换法和多线性分离变量法, 可以得到多个(2+1)维非线性模型包含任意函数的严格解, 通过选取不同的任意函数, 构造这些非线性模型新的相互激发模式. 进一步推广了形变映射理论, 建立了变系数 ϕ^4 场和 sine-Gordon 以及双 sine-Gordon 场的形变映射关系, 从而得到高维不可积模型包含任意函数的新严格解. 对任意函数的不同选择, 构造了 sine-Gordon 和双 sine-Gordon 可积模型丰富的局域解和周期解, 如多 soliton 解及其周期波推广、周期形变的蛇形孤波解以及变模的拟周期解等.

关键词: 达布变换法; 分离变量法; 形变映射关系; sine-Gordon 方程; 双 sine-Gordon 方程; 周期波解; 拟周期波解

中图分类号: O411.1

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2020) 05-0045-06

作为现代非线性科学的一个重要分支, 孤立子理论引起了人们越来越浓厚的研究兴趣, 在自然科学的各个方面都得到了迅猛的发展. 孤立子理论的一个重要研究内容就是如何寻求更多非线性模型, 特别是高维模型的严格解, 并用这些新的精确解来解释已知的实验或者自然现象, 预测可能发生的自然灾害, 如海啸等等. 由于孤立子理论的研究对象都是非线性系统, 在线性系统中行之有效的解的叠加性原理不再适用, 人们不得不考虑其他方法来研究非线性问题. 在孤立子理论半个多世纪的发展进程中, 很多数学家和理论物理学家提出和发展了很多求解非线性问题的方法, 如反散射方法、对称约化法、Hirota 双线性方法、Painleve 分析、齐次平衡法、Bäcklund 变换、摄动法、几何方法、分离变量法以及达布变换法等^[1-11].

在线性物理中有两大普遍适用的方法——傅立叶变换法和分离变量法. 由于在线性物理和非线性物理中研究的对象不同, 所采用的方法也无法完全套用. 直到 20 世纪 60 年代, 傅立叶变换法才被成功地推广到非线性科学中的一些可积模型中,

这就是著名的反散射方法. 而对于分离变量法, 在非线性科学中一直没有得到成功的推广和应用. 近几十年来, 人们提出多种形式的变量分离方法, 如先验假设法、基于 Lax 对的非线性化方法、对称约束法、形式分离变量法、泛函分离变量法以及多线性分离变量法等^[12-21]. 而达布变换法作为求解具有 Lax 对的非线性系统的一种有效方法, 有着非常广泛的应用. 达布变换法可以追溯到 19 世纪末法国数学家 Darboux 在研究线性 Sturm-Liouville 问题时的思考方法. 通过达布变换方法可以得到单个或者耦合非线性系统的精确解, 如不稳定的薛定谔方程、KdV 方程、Davey-Stewartson 方程、Kadomtsev-Petviashvili 方程、(1+1)和(2+1)维的 Toda 格点方程、sine-Gordon 方程以及高维非线性薛定谔系统等.

另一方面, 由于实际物理模型通常为不可积模型, 如何寻找不可积模型包含任意函数的变量分离解一直是待解决的一个难题. 为此, 作者进一步发展和推广了已有文献中 ϕ^4 场和高维不可积的 sine-Gordon 模型之间的形变映射方法, 建立了单

个或者变系数的 ϕ^4 场与高维不可积的 sine-Gordon 和双 sine-Gordon 模型之间的形变映射关系, 求得了这些高维不可积模型包含任意函数的用 Jacobi 椭圆函数表示的变量分离严格解. 利用包含任意函数的 Jacobi 椭圆函数的严格解, 得到了不可积的 sine-Gordon 或者双 sine-Gordon 模型的丰富的周期波-solitoff 解、周期波-周期波的相互作用、周期波-kink 解、拟周期波解以及它们之间的相互激发模式.

本文主要内容安排如下: 第 1 节借助于达布变换法和非线性系统的变量分离的初值解, 构造一些(2+1)维非线性系统的达布变换的包含任意多个变量分离函数的严格解, 并给出一些新的局域激发模式. 这些非线性系统包括(2+1)维色散长波方程、非对称的 Nizhnik-Novikov-Veselov 方程、Nizhnik-Novikov-Veselov 方程和修正的 Nizhnik-Novikov-Veselov 方程. 利用这些达布变换给出的包含变量分离函数的严格解的表达式, 得到了这些(2+1)维非线性系统的特殊形式的周期波解、鞍型环孤子解、dromion-solitoff 解、compacton 解以及多 dromion 解等. 第 2 节通过建立 ϕ^4 场和高维 sine-Gordon 模型的形变映射关系, 得到这些高维不可积模型包含任意函数并用 Jacobi 椭圆函数表示的变量分离的严格解. 第 3 节是全文的总结, 讨论并对将来的研究工作进行展望.

1 与(2+1)维非线性可积系统的达布变换相关联的变量分离解

本节重点研究若干高维系统的达布变换解并比较这些解与分离变量法所得结果的差别. (2+1)维色散长波方程是描述浅水波运动的一个非 Painleve 可积模型, 它最早由 Boiti 等利用弱 Lax 对导出, 随后其他作者研究了它的反散射和对称代数等性质. (2+1)维色散长波方程^[12]的具体形式如下:

$$u_{yt} + (v_x + uu_y)_x = 0, \quad v_t + (uv + u_{xy})_x = 0. \quad (1)$$

在文献[8,21]中, 作者导出分离变量解的普适公式

$$U = \frac{-2\Delta q_y p_x}{(a_0 + a_1 p + a_2 q + a_3 pq)^2} = -v, \quad \Delta \equiv a_0 a_3 - a_1 a_2, \quad (2)$$

式中: p 是任意函数; q 是 Riccati 方程的一个任意

解; $a_i (i = 0, 1, 2, 3)$ 是任意常数. 按照标准的二元达布变换步骤, 可以得到色散长波方程(1)的一次达布变换如下:

$$\begin{aligned} u[1] &= u + 2 \left[\ln \left(\frac{\Delta(\varphi_1, \varphi_1^*)}{\Omega(\varphi_1, \varphi_1^*)} \right) \right]_x, \\ p[1] &= p + 2 \left[\ln \left(\frac{\Delta(\varphi_1, \varphi_1^*)}{\Omega(\varphi_1, \varphi_1^*)} \right) \right]_y, \\ v[1] &= v + 2[\ln(\Delta(\varphi_1, \varphi_1^*)\Omega(\varphi_1, \varphi_1^*))]_{xy}, \end{aligned} \quad (3)$$

式中: $u_y = p_x$; 而 φ_1, φ_1^* 是色散长波方程 Lax 对的一组共轭解; $\Delta(\varphi_1, \varphi_1^*), \Omega(\varphi_1, \varphi_1^*)$ 是通过该 Lax 对定义的两个奇性流形. 利用达布变换纯代数的迭代性质, 可以将 N 次达布变换用行列式表示. 通常人们在做非线性系统的达布变换时, 一般都取零种子解, 这样做的好处是经达布变换后比较容易求解 Lax 对, 缺点是这种取法很难得到非线性系统的新严格解. 为了得到包含变量分离函数的新解, 取色散长波方程的种子解为 $v = p = 0$, $u = u_0(x, t)$, 相应的波函数变成 $\varphi_1 = p_1(x, t) + q_1(y, t)$, $\varphi_1^* = P_1(x, t) + Q_1(y, t)$, 结合第一次达布变换的结果(3), 经过计算可以得到色散长波方程的一个新解

$$\begin{aligned} u[1] &= u_0 + \frac{2p_{1x}(P_1 + F_1 + C_1)}{p_1 F_1 + c_1 F_1 + C_1 p_1 + \alpha_{11} + a_{11}} - \frac{2P_{1x}(p_1 + f_1 + c_1)}{P_1 f_1 + C_2 f_1 + c_1 P_1 + \beta_{11} + b_{11}}, \\ v[1] &= \frac{(\alpha_{11} - P_1(p_1 + f_1 + c_1) - f_1(F_1 + C_1) - c_1 C_1)}{(p_1 F_1 + c_1 F_1 + C_1 p_1 + \alpha_{11} + a_{11})^2} \cdot \\ &\quad \frac{2p_{1x}F_{1y} + 2P_{1x}f_{1y}}{(\beta_{11} - p_1(P_1 + F_1 + C_1) - F_1(f_1 + c_1) - c_1 C_1)} \cdot \\ &\quad \frac{2p_{1x}F_{1y} + 2P_{1x}f_{1y}}{(P_1 f_1 + C_1 f_1 + c_1 P_1 + \beta_{11} + b_{11})^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

式中: $p_1 = p_1(x, t)$, $P_1 = P_1(x, t)$, $f_1 = f_1(y)$, $F_1 = F_1(y)$, $c_1 = c_1(t)$, $C_1 = C_1(t)$. 可以直接验证当 $P_1 = f_1 = 0$, $c_1 = C_1 = \text{常数}$ 时, 式(4)的第 1 项就是分离变量法的普适公式(2), 第 2 项自动消失. 类似地, 取 $p_1 = F_1 = 0$, $c_1 = C_1 = \text{常数}$ 时, 式(4)的第 2 项就是普适公式(2), 第 1 项自动为 0. 因此, 从一次达布变换结果出发, 通过选取 Lax 对的波函数变量分离解, 也得到了(2+1)维色散长波方程的多线性分离变量法的普适公式, 由此可以看出, 运用不同的方法和手段, 达到了同样的结果. 总之, 通过对色散长波方程的 Lax 对的种子解选取变量分

离函数作为初值解, 得到的 N 次达布变换的表达式可简洁地写成 Grammian 行列式的形式, 并且在此行列式中包含任意多的变量分离函数, 通过选取不同的变量分离函数, 可以构造色散长波方程更多类型的新严格解和新局域激发模式. 另外需要指出的是, 对许多高维非线性系统适用的普适公式(4)仅仅是一次达布变换得到解的表达式的一种特殊情形. 由此看来, 通过达布变换构造的变量分离函数解要比分离变量法得到的分离变量解更丰富.

采用同样的方法, 引进闭的 1-形式来构造(2+1)维非对称 Nizhnik-Novikov-Veselov 方程和(2+1)维 Nizhnik-Novikov-Veselov 方程的二元达布变换, 通过选取它们 Lax 对的分离变量解, 利用二元达布变换的一次迭代公式, 得到了这些非线性系统的新变量分离解, 进一步选取适当的任意函数来研究非线性系统的新周期解和孤波解等. 另一方面, 利用 Miura 变换和达布变换, 得到了(2+1)维 mNNV 系统的包含任意变量分离函数的用 Pfaffian 表示的 N 次达布变换的新严格解. 通过选择合适的变量分离函数, 得到了 mNNV 方程的一个新的周期解和包含 4 个 dromion 的新孤子解.

此外, 达布变换法适用于 Lax 对存在的非线性系统, 且不需要先验的假设条件, 这是与分离变量法相区别的重要一点. 另外一方面, 达布变换可以一次次地迭代下去, 是一个纯代数的过程, 这样非线性系统的解中就可以包含任意多的变量分离函数. 而在分离变量法的普适公式中, 最多含有 2 个任意的分离变量函数. 因为在非线性系统中, 线性叠加原理并不适用, 所以分离变量法本身无法通过线性叠加原理来增加变量分离函数的个数, 达布变换法恰恰解决了这个难题. 对一个给定的非线性系统来说, 每经过一次达布变换, 其解的表达式中的变量分离函数个数就会增加, 从而大大丰富了非线性系统的解的任意性和多样性.

总之, 利用达布变换法和非线性系统本身的变量分离的函数解, 可以得到一些非线性系统的包含任意多个变量分离函数的严格解, 可通过进一步选择适当的任意函数来构造非线性系统新的局域激发模式, 研究新的孤波解和周期解的性质和它们之间的相互作用.

2 高维非线性不可积系统的严格解

在实际物理问题中, sine-Gordon 和双 sine-Gordon 系统是 2 个最基本的重要非线性方程. 本节将以这 2 个重要的物理模型为例来寻求一些不可积模型的具有任意函数的严格解. 分别给出单个和多个 ϕ^4 模型与 $(N+1)$ 维 sine-Gordon 系统之间的形变映射关系, 进而构造不可积的 sine-Gordon 模型新的含有变量分离函数的孤波解、周期解以及拟周期波解等. 而 $(N+1)$ 维 sine-Gordon (nSG) 系统在物理学中有很多实际应用, 如在简并媒质中的超短光脉冲的共鸣传播性质, 在压缩链 XY 下的非线性激发, 以及与光学和弦论相关联的物理问题的各个方面等^[22-30].

首先建立 $(N+1)$ 维 sine-Gordon 模型与多个约束的 ϕ^4 场的形变映射关系来寻求更多的 nSG 方程的严格解, 特别是多周期波解和孤波解之间的相互作用. 可以直接证明, $(N+1)$ 维 sine-Gordon 方程形式如下:

$$\Phi + \frac{m}{g} \sin g\Phi \equiv \sum_{i=1}^n \Phi_{x_i x_i} - \Phi_{tt} + \frac{m}{g} \sin g\Phi = 0, \quad (5)$$

那么, 函数

$$\Phi = \frac{2\alpha\pi}{g} \pm \frac{4}{g} \tan^{-1} \phi, \quad \alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

是 $(N+1)$ 维 sine-Gordon 模型的解, 其中函数 ϕ 满足关系式

$$\phi \equiv \sum_{i=1}^n \phi_{x_i x_i} - \phi_{tt} = \lambda\phi + \mu\phi^3, \quad (6)$$

以及

$$(\nabla\phi)^2 \equiv \sum_{i=1}^n \phi_{x_i}^2 - \phi_t^2 = \frac{1}{2}(\lambda + \mu - m)\phi^2 + \frac{\mu}{2}\phi^4 + \frac{1}{2}(\lambda + m). \quad (7)$$

由上述形变映射关系可得式(5)的变量分离解

$$\Phi = \frac{2\alpha\pi}{g} \pm \frac{4}{g} \tan^{-1} \left(\sqrt{k} \operatorname{sn} \frac{\sqrt{m|V|}}{k+1} \right), \quad (8)$$

式中, 变量 V 满足

$$V = \sum_{i=1}^n k_{0i} x_i \pm \left(\sum_{i=1}^n k_{1i}^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n k_{0i} k_{1i} \right) t + f \left(\sum_{i=1}^n k_{1i} x_i \pm \sqrt{\sum_{i=1}^n k_{1i}^2} t \right),$$

其中, 常数满足关系式

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{0i}^2 k_{1j}^2 - \left(\sum_{j=1}^n k_{0i} k_{1j} \right)^2 - \frac{m}{|m|} \sum_{i=1}^n k_{1i}^2 = 0,$$

k 是 Jacobi 椭圆函数的模. 如果取

$$f\left(\sum_{i=1}^n k_{1i} x_i + \sqrt{\sum_{i=1}^n k_{1i}^2} t\right) = f(\xi) = \frac{1}{3} \sqrt{\xi^2 + 1},$$

那么(2+1)维 sine-Gordon 方程的解(8)表示一个包含 2 个周期波的相互作用解, 在不同的区域里, 分别有一个周期波起主导作用. 由于在式(8)中任意函数 $f(\xi)$ 的存在就决定了周期行波解的丰富结构. 通过选取任意函数 $f(\xi)$ 的特殊形式, 可以得到多种多样的解形式及它们之间的相互作用性质.

为了得到更多复杂的多周期波解以及周期波与 kink 解的相互作用, 引进 2 个 ϕ^4 模型的解与 nSG 方程之间的形变映射关系, 来得到更为丰富的高维 sine-Gordon 系统的严格解. 下面的定理给出它们之间的形变映射关系.

定理 1 如果函数 ϕ_1 和 ϕ_2 是 ϕ^4 模型 $\phi_1 = \lambda_1 \phi_1 + \mu_1 \phi_1^3$, $\phi_2 = \lambda_2 \phi_2 + \mu_2 \phi_2^3$ 在约束条件 $(\nabla \phi_1)^2 = g_1(\phi_1, \phi_2)$, $(\nabla \phi_2)^2 = g_2(\phi_1, \phi_2)$, $(\nabla \phi_1) \cdot (\nabla \phi_2) = \sum \phi_{1x_i} \phi_{2x_i} - \phi_{1t} \phi_{2t} = g_{12}(\phi_1, \phi_2)$ 下的 2 个解, 记 $f = a + b\phi_1\phi_2$, $h = \phi_1 + c\phi_2$, 并要求函数之间满足关系

$$\begin{aligned} & hf(f^2 - h^2)m + (h^2 + f^2)[\phi_1(\lambda_1 + \mu_1\phi_1^2) \times \\ & (bc\phi_2^2 - a) + \phi_2(\phi_2^2\mu_2 + \lambda_2)(b\phi_1^2 - ca)] + \\ & 2(bc\phi_2^2 - a)(b\phi_2 f + h)g_1 + 2(b\phi_1^2 - ca) \times \\ & (ch + bf\phi_1)g_2 - 4hf(ab + c)g_{12} = 0, \end{aligned}$$

那么

$$\Phi = \frac{2\alpha\pi}{g} \pm \frac{4}{g} \tan^{-1} \frac{h}{f}, \alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

就是(N+1)维 sine-Gordon 方程(5)的一个解. 特别地, 如果把简单的函数约束关系

$$\phi_1 = \phi_1(V_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t)) \equiv \phi_1(V_1),$$

$$\phi_2 = \phi_2(V_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t)) \equiv \phi_2(V_2),$$

$$\phi_{1V_1}^2 = \lambda_1 \phi_1^2 + \frac{\mu_1}{2} \phi_1^4 + C_1,$$

$$\phi_{2V_2}^2 = \lambda_2 \phi_2^2 + \frac{\mu_2}{2} \phi_2^4 + C_2,$$

以及常数选取为

$$c = ab,$$

$$a^2 = -\frac{\lambda_1}{\mu_1},$$

$$C_1 = \frac{\lambda_1^2}{2\mu_1},$$

$$g_1 = \frac{m}{2\lambda_1},$$

$$g_{12} = g_2 = 0,$$

可以得到 sine-Gordon 模型的多个周期波解或者周期波-kink 解的相互作用.

总之, 借助于 ϕ^4 模型与 nSG 系统之间已有的形变映射关系, 并且进一步发展和推广这种形变映射关系, 得到了 nSG 系统的包含常数模的 Jacobi 椭圆函数解以及 2DSG 方程包含任意函数为模的 Jacobi 椭圆函数解, 这些解都可以看成是具有任意函数的特殊形式的变量分离解. 与多线性分离变量法所得到的变量分离解相比较, 通过这种形变映射方法得到的解没有普适公式(2)中的任意函数分离得那样彻底, 而是一种相对特殊的包含变量分离函数的严格解. 通过选择适当的常数和变量分离的任意函数, 分别构造了 nSG 系统及其在(2+1)维情形下的多种周期-周期波解、多线性与曲线孤波解、周期-kink 解、周期-周期-kink 解以及有不同的激发模式的拟周期解等等.

3 总结和讨论

本文首先将达布变换法和分离变量法结合起来, 成功地构造了一些(2+1)维非线性系统的包含多个变量分离函数的严格解, 并且研究了这些非线性系统的严格解之间的相互作用性质. 由于达布变换法只是一个纯代数的迭代过程, 无需先验假设条件, 这也克服了多线性分离变量法的一个不足之处. 利用非线性系统及其 Lax 对的变量分离的初值解, 可以构造非线性系统的二元达布变换, 并利用达布变换的迭代性, 可以得到非线性系统的包含任意多个变量分离函数的严格解, 达布变换法得到的解中包含的变量分离函数个数远远多于多线性分离变量法的普适公式中的变量分离函数个数. 因此, 从达布变换法得到的严格解的变量分离函数的选择性和丰富性都大大增加, 为构造非线性系统的新的孤子解提供了条件.

另一个方面, 对于高维不可积系统, 首先推广单个 ϕ^4 场和高维不可积模型之间的形变映射关系, 构造不可积模型包含变量分离的任意函数的第一

种严格解. 更进一步建立了多个 ϕ^4 场和高维不可积模型之间的复杂形变映射关系, 从而得到不可积系统的更为丰富的周期解以及模为任意函数的拟周期解. 近十多年来, 达布变换法在构造非线性系统的怪波解研究中发挥了重要作用, 得到了许多有意义的研究成果. 此外, 通过引进多个约束条件和任意函数来寻求不可积系统的新严格解也有很多有益的尝试.

参考文献:

- [1] Gardner C S, Greene J M, Kruskal M D, et al. Method for solving the Korteweg-de Vries equation[J]. *Physical Review Letters*, 1967, 19(19):1095-1097.
- [2] Lax P D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1968, 21(5):467-490.
- [3] Zakharov V E, Shabat A B. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media[J]. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1972, 34(1):62-69.
- [4] Zakharov V E, Shabat A B. A scheme for integrating the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem. I[J]. *Functional Analysis and its Applications*, 1975, 8(3):226-235.
- [5] Ablowitz M J, Kaup D J, Newell A C, et al. The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems[J]. *Studies in Applied Mathematics*, 1974, 53(4):249-315.
- [6] Hirota R. Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons[J]. *Physical Review Letters*, 1971, 27(18):1192-1194.
- [7] Cao C W. Nonlinearization of the Lax system for AKNS hierarchy[J]. *Science in China: Series A*, 1990, 33(5):528-536.
- [8] Cheng Y, Li Y S. The constraint of the Kadomtsev-Petviashvili equation and its special solutions[J]. *Physics Letters A*, 1991, 157(1):22-26.
- [9] Konopelchenko B, Sidorenko J, Strampp W. (1+1)-dimensional integrable systems as symmetry constraints of (2+1)-dimensional systems[J]. *Physics Letters A*, 1991, 157(1):17-21.
- [10] Lou S Y, Chen L L. Formal variable separation approach for nonintegrable models[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1999, 40(12):6491-6500.
- [11] Weiss J, Tabor M, Carnevale G. The Painlevé property for partial differential equations[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1983, 24(3):522-526.
- [12] Tang X Y, Chen C L, Lou S Y. Localized solutions with chaotic and fractal behaviours in a (2+1)-dimensional dispersive long-wave system[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2002, 35(22):L293-L301.
- [13] Dolye P W. Separation of variables for scalar evolution equations in one space dimension[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1996, 29(23):7581-7595.
- [14] Dolye P W, Vassiliou P J. Separation of variables for the 1-dimensional non-linear diffusion equation[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1998, 33(2):315-326.
- [15] Zhdanov R Z. Separation of variables in the nonlinear wave equation[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1994, 27(9):L291-L297.
- [16] Zhdanov R Z, Revenko I V, Fushchych W I. Orthogonal and non-orthogonal separation of variables in the wave equation $u_{tt} - u_{xx} + V(x)u = 0$ [J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1993, 26(21):5959-5972.
- [17] Zhdanov R Z. Separation of variables in (1+2)-dimensional Schrödinger equations[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1997, 38(2):1197-1217.
- [18] Cheng Y, Li Y S. The constraint of the Kadomtsev-Petviashvili equation and its special solutions[J]. *Physics Letters A*, 1991, 157(1):22-26.
- [19] Lou S Y, Chen L L. Formal variable separation approach for nonintegrable models[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1999, 40(12):6491-6500.
- [20] Qu C Z, Zhang S L, Liu R C. Separation of variables and exact solutions to quasilinear diffusion equations with nonlinear source[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2000, 144(1/2):97-123.
- [21] Zhang S L, Lou S Y, Qu C Z. New variable separation approach: Application to nonlinear diffusion equations[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2003, 36(49):12223-12242.
- [22] Zhang S L, Lou S Y. Derivative-dependent functional separable solutions for the KdV-type equations[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2004, 335(3/4):430-444.
- [23] Lou S Y, Lu J Z. Special solutions from the variable separation approach: the Davey-Stewartson equation[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1999, 29(14):4209-4215.
- [24] Qian X M, Lou S Y, Hu X B. Variable separation approach for a differential-difference system: Special Toda equation[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2004, 37(6):2401-2411.

- [25] Tang X Y, Lou S Y, Zhang Y. Localized excitations in (2+1)-dimensional systems[J]. Physical Review E, 2002, 66(4):046601.
- [26] Ablowitz M J, Kaup D J, Newell A C, et al. Method for solving the sine-Gordon equation[J]. Physical Review Letters, 1973, 30(25):1262-1264.
- [27] Lou S Y. Localized excitations of the (2+1)-dimensional sine-Gordon system[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2003, 36(13):3877-3892.
- [28] Remoissenet M. Non-linear excitations in a compressible chain of dipoles[J]. Journal of Physics C: Solid State Physics, 1981, 14(11):L335-L338.
- [29] Bishop A R. Solitons in condensed matter physics[J]. Physica Scripta, 1979, 20(3/4):409-423.
- [30] Kivshar Y S, Malomed B A. Dynamics of solitons in nearly integrable systems[J]. Reviews of Modern Physics, 1989, 61(4):763-915.

Exact solutions for some high dimensional integrable and nonintegrable systems

HU Hengchun

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: How to find more exact solutions of the integrable and nonintegrable systems is one of the most important issues in the soliton theory. With the help of Darboux transformation and variable separation solutions of initial problem and Lax pair of the PDEs, we obtain some new types of soliton solutions of the dispersive long wave equation, the asymmetric Nizhnik-Novikov-Veselov equation, the Nizhnik-Novikov-Veselov equation. Considering the entrance of the arbitrary variable separated functions, we can construct many new types of exact solutions and the multiple localized excitations through proper selections of the arbitrary functions. In this study, we have developed the mapping relations between one or more constrained ϕ^4 fields and high dimensional sine-Gordon or double sine-Gordon equation. From the mapping relations, we can obtain many new kinds of the periodic wave solutions, the quasi-periodic wave solutions and periodic-kink solutions of high dimensional sine-Gordon and double sine-Gordon systems.

Key words: Darboux transformation; variable separation approach; mapping relations; sine-Gordon equation; double sine-Gordon equation; periodic wave solution; quasi-periodic wave solution

(责任编辑 韩 超)