

近似对称约化简述

焦小玉

(南京财经大学 应用数学学院, 江苏 南京 210023)

摘要: (同伦)近似对称方法由摄动法与对称约化方法相结合产生, 用于微分方程级数解的构造. 对称约化方法应用于微分方程或者其同伦模型经扰动展开分解而成的无穷多近似子方程, 可以得出通式形式的无穷多约化解和相应的约化方程, 再通过求解约化方程进一步得出原方程的截断级数解. 截断级数解的存在性体现原方程的可解性, 通常取决于扰动项的阶数与最高阶导数项奇偶性是否一致.

关键词: 摄动法; 对称约化; 直接法; 近似对称方法; 同伦近似对称方法; 可解性

中图分类号: O415

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2020) 05-0051-05

微分方程源自现实问题中的各种现象, 通常是实际问题在一定程度上的简化, 为便于研究讨论而忽略了诸如微扰项之类的一些次要因素. 若保留微扰项, 微分方程形式更加复杂, 但更加切合实际. 摄动法^[1]是这类扰动微分方程的一种重要求解方法: 进行解的某种渐进展开, 代入方程和定解条件中, 然后进行量级的比较, 可以将一个困难的问题分解为一系列相对简单的子问题. 例如, 对于含有因变量 u 和摄动参数 ϵ 的扰动微分方程

$$\mathcal{E}(u, \epsilon) = 0, \quad (1)$$

代入渐进展开式

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \epsilon^i, \quad (2)$$

比较摄动参数 ϵ 的不同量级, 可以产生无穷多个子方程:

$$\mathcal{E}_k(u_0, u_1, \dots, u_k) = 0, k = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

零阶近似方程(k 取 0)仅含因变量 u_0 , 与忽略扰动项的原扰动方程(1)形式完全相同; k 阶近似方程因变量为 $u_0, u_1, \dots, u_k$, 随着阶数 k 的增加, 因变量数目依次增加, 形式愈加复杂. 对于这些近似方程, 依据由简到繁的求解思路, 采用逐步求解的方式, 理论上可以依次求解 $u_0, u_1, \dots$, 再利用展开式(2)确定具有合适精度的截断级数解. 近似对称方法

与同伦近似对称方法作为摄动法与微分方程精确求解方法相结合而产生的方法, 在本文的第 1、2 部分分别予以介绍, 第 3 部分通过举例说明如何应用这类方法构造微分方程的截断级数解.

1 近似对称

微分方程的精确求解方法多种多样, 作为一种重要的精确求解方法, 对称约化方法源自理论体系高度完善的李群理论^[2-3], 该方法通过减少自变量的个数实现微分方程的化简与求解. 该方法主要过程为: 首先, 将原方程、相应的对称方程以及函数形式的点对称联立从而产生决定方程组; 其次, 求解该方程组得出无穷小生成元; 最后, 求解特征方程得到约化解以及原方程通过该约化解降维而产生的约化方程. 同样的结果也可以由直接法^[4]重新构造, 该方法直接假定原方程的解具有约化解的特定形式, 其中包含一些未知待定系数, 根据原方程在该约化解的作用下变量数目降低这一显著特点, 确定这些待定系数, 从而完成原方程的约化过程. 直接法简单易懂, 不涉及李群理论, 但是与对称约化方法相比, 缺点也很明显: 求解待定系数过程需要进行仔细的观察与比较, 而对称约化方法则可以直接利用符号计算软件实现整个

求解过程.

利用对称约化方法求解摄动法产生的近似子方程(3), 则产生近似对称方法^[5], 即各阶近似子方程的精确对称. 另一种近似对称法^[6]将对称群生成元推广至扰动形式, 是真正意义上的对称群的近似, 文献[7-8]通过对两种方法的比较说明第一种方法无论在求解的复杂性还是结果的广泛性上都更优.

值得注意的是, 不同于各种精确求解方法, 近似子方程(3)的对称约化并不是由低阶方程到高阶方程依次求解 $u_0, u_1, \dots$, 因为这一做法不能预设函数形式的点对称, 求解过程无法顺利进行. 鉴于近似子方程(3)包含无穷多个子方程, 取定前几个近似子方程并且应用对称约化法求解, 观察与比较所得约化解以及约化方程的具体形式, 推断所有约化解以及约化方程所具有的通式形式, 该做法通过各种实例证实是非常有效的^[9-10]. 另外, 摄动法产生的近似子方程(3)亦可以利用直接法求解, 即产生近似直接法^[9], 该方法能够求出近似对称方法同样的结果.

近似对称方法以及近似直接法的主要求解过程为: 首先, 利用关于扰动参数的级数解假设将扰动方程分解为无穷多近似方程; 其次, 利用李对称方法或直接约化法研究这些方程中的有限个, 求出有限个方程的约化解以及相应的约化方程, 通过比较有限结果推测所有近似方程的约化解及相应的约化方程的通式; 再次, 选取合适方法求解各阶约化方程的精确解; 最后, 确定原扰动方程的截断级数解, 讨论解的收敛性等各种性质.

2 同伦近似对称

近似对称方法和近似直接法均以摄动法为基础发展而来, 因此仅适用于扰动微分方程. 对于非扰动微分方程, 若能通过引入合适的人工参数作为扰动参数, 则两种方法依然适用. 由于同伦具有连续变形的特点, 发挥连续变形作用的参数视为扰动参数, 则两种方法的应用范围能够扩展至非扰动微分方程, 从而产生同伦近似对称法^[11]和同伦近似直接法^[12].

这一想法是受到同伦分析法^[13-15]的启发而产生的, 该方法源自同伦与摄动法的结合, 通过将非

线性方程分解为无穷多线性子方程实现非线性方程的化简与求解. 此方法适用于非扰动方程, 因而较摄动法优越, 亦能求出摄动法、人工参数法^[16]、 δ 扰动展开法^[17]以及 Adomian 分解法^[18]求解的级数解.

构造合适的同伦模型, 是同伦近似对称法和同伦近似直接法首要解决的问题. 例如, 给定一个含有因变量 u 的非线性微分方程

$$\mathcal{E}(u) = 0, \quad (4)$$

引入一个同伦模型

$$\mathcal{H}(u, q) = 0, \quad (5)$$

式中, $q \in [0, 1]$ 为嵌入同伦参数. 该同伦模型具有如下性质:

$$\mathcal{H}(u, 0) = \mathcal{A}(u), \mathcal{H}(u, 1) = \mathcal{E}(u), \quad (6)$$

其中, $\mathcal{A}(u) = 0$ 是容易求解的微分方程. 若同伦参数 q 视作扰动参数, 则近似对称方法和近似直接法得以进行, 即假设同伦模型(5)有类似于式(2)形式的级数解

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i q^i, \quad (7)$$

再依据摄动法以及对称约化法或直接法求解.

值得注意的是, 同伦模型(5)应切中要害, 既反映问题的本质, 又形式简洁, 在能够求出有价值的截断级数解的前提下, 最大限度降低计算求解的复杂程度. 很显然, 如下线性形式的同伦模型最为简单:

$$(1-q)\mathcal{A}(u) + q\lambda\mathcal{E}(u) = 0, \quad (8)$$

其中, 具有比例系数作用的辅助参数 λ 是无法回避的. 容易看出, 当 q 由0逐渐变到1时, 该同伦模型渐近地由容易求解的方程 $\mathcal{A}(u) = 0$ 变到待求解的原方程(4), 体现了由简到繁的渐变过程. $\mathcal{A}(u)$ 的选择也极其重要, 若 $\mathcal{A}(u) = 0$ 过于简单, 则无法体现实际问题的本质, 文献[13-15]采用的同伦模型中, $\mathcal{A}(u) = 0$ 取为线性方程, 起决定性作用的非线性项缺失, 因此 $\mathcal{A}(u) = 0$ 更宜选取为非线性方程.

3 应用举例

扰动 KP 方程形如

$$\mathcal{E}(u) \equiv (u_t + 6uu_x + u_{x^3})_x + \alpha u_{yy} - \epsilon \mathcal{P}(u) = 0, \quad (9)$$

是通过如下 KP 方程^[19]添加扰动项 $\epsilon \mathcal{P}(u)$ 而产生

的:

$$A(u) \equiv (u_t + 6uu_x + u_{x^3})_x + \alpha u_{yy} = 0. \quad (10)$$

近似对称方法直接对(9)进行式(2)的扰动展开, 再利用对称约化方法求解近似子方程, 同伦近似对称方法则需要构造如下的同伦模型:

$$(1-q)A(u) + q(1-\theta)\mathcal{E}(u) = 0. \quad (11)$$

显然, 当同伦参数 q 由 0 逐渐变到 1 时, 该同伦模型逐渐由 KP 方程转变为扰动 KP 方程. 其中, $\theta \neq 1$ 是辅助参数. 暂取定一类特殊的微扰项 $\epsilon P(u) = \epsilon u_{x^{6-n}y^n}$, $n = 0, 1, \dots, 6$, 即因变量关于空间变量 $\{x, y\}$ 的所有 6 阶导数. 关于同伦参数 q 的扰动展开式(7)可以将该同伦模型分解为一系列近似子方程:

$$(u_{k,t} + 6 \sum_{i=0}^k u_{k-i} u_{i,x} + u_{k,x^3})_x + \alpha u_{k,yy} + \epsilon(\theta-1) \sum_{i=0}^{k-1} \theta^{k-1-i} u_{i,x^{6-n}y^n} = 0, k = 0, 1, \dots, \quad (12)$$

其中 $u_{-1} = 0$. 本文所有负指标量均取 0. 这些近似子方程的线性化方程为

$$[\sigma_{k,t} + 6 \sum_{i=0}^k (\sigma_{k-i} u_{i,x} + u_{k-i} \sigma_{i,x}) + \sigma_{k,x^3}]_x + \alpha \sigma_{k,yy} + \epsilon(\theta-1) \sum_{i=0}^{k-1} \theta^{k-1-i} \sigma_{i,x^{6-n}y^n} = 0, k = 0, 1, \dots, \quad (13)$$

其中, 函数形式的点对称形如

$$\sigma_k = Xu_{k,x} + Yu_{k,y} + Tu_{k,t} - U_k, k = 0, 1, \dots, \quad (14)$$

其中, $\{X, Y, T, U_k, (k = 0, 1, \dots)\}$ 的变量为 $\{x, y, t, u_k, (k = 0, 1, \dots)\}$.

式(12)~(14)的联立用于决定 $\{X, Y, T, U_k, (k = 0, 1, \dots)\}$. 取定 n , 将式(14)代入式(13), 利用式(12)消去 $u_{k,x}$, 并且将 u_k 的所有导数的系数取为 0, 则得到关于 $\{X, Y, T, U_k, (k = 0, 1, \dots)\}$ 的无数方程组成的决定方程组. 为简化求解, 仅考虑式(12)的前几个方程. 例如限定式(12)中 k 的范围 $k \in \{0, 1, 2\}$. 易知 $\{X, Y, T, U_0, U_1, U_2\}$ 的变量减少为 $\{x, y, t, u_0, u_1, u_2\}$, 尝试不同 n 的取值, 反复求解决定方程组, 可以推断决定方程组的解形如

$$\begin{aligned} X &= C_1 x + 6f(t), \\ Y &= 2C_1 y + C_3, \\ T &= 3C_1 t + C_2, \\ U_k &= C_1[(n+2)(k-1)\theta u_{k-1} - ((n+2)k+2)u_k + \delta_{k,0}f'(t)], k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (15)$$

其中, C_1, C_2, C_3 为任意常数, 满足 $\delta_{0,0} = 1$ 以及 $\delta_{k,0} = 0, (k \neq 0)$ 的记号 $\delta_{i,j}$ 亦适用于下文. 令式(14)中的所有 σ_k 取 0, 求解相应的特征方程, 则可以确定式(12)的相似解. 若取 $C_1 = 0, C_2 = 0, C_3 \neq 0$, 将 C_3 改写为 a , 产生相似解(其余相似解见文献[20]):

$$u_k = \frac{f'(t)x}{6f(t)} \delta_{k,0} + P_k(\xi, t), \xi = y - \frac{ax}{6f(t)}, \quad (16)$$

此时, 近似方程(12)约化为通式

$$\begin{aligned} (6\alpha f(t)P_{k,\xi} + \frac{a^4}{216f^3(t)}P_{k,\xi^3} - \frac{af'(t)}{f(t)}P_k - \\ aP_{k,t} + \frac{a^2}{f(t)} \sum_{i=0}^k P_{i,\xi} P_{k-i})_{\xi} + \delta_{k,0}f''(t) + \\ \frac{(-1)^n a^{(6-n)}(\theta-1)\epsilon}{(6f(t))^{(5-n)}} \sum_{i=0}^{k-1} \theta^{k-1-i} P_{i,\xi^6} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

这些约化方程通常难于求解, 若假设 $f(t)$ 为一个常数 b , 则各项的系数均化为常数, 复杂程度大大降低, 考虑诸如雅可比椭圆函数形式的特解, 做出假设

$$P_k = \sum_{i=0}^{n_k} f_{k,i}(\xi, t) \operatorname{sn}^i(g(\xi, t), m), \quad (18)$$

其中 $\{f_{k,i}, g\}$ 是关于所含变量的待定函数. P_k 的确定可以通过分步求解过程实现. 在第 k 步中, 将已知解 $\{P_0, P_1, \dots, P_{k-1}\}$ 以及未知解 P_k 代入式(17)中的 k 阶方程, 再取所有含有 $\{\operatorname{sn}(g(\xi, t), m), \operatorname{cn}(g(\xi, t), m), \operatorname{dn}(g(\xi, t), m)\}$ 的各项系数为 0, 则可以得到式(18)中各项系数 $f_{k,i}(\xi, t)$ 的方程组. 通过求解这些方程组, 再回代式(18), 即可得到约化方程(17)中的前几个方程的雅可比椭圆函数解(见文献[20]附录).

在 $q=1$ 条件下, 将(16)以及雅可比椭圆函数解代入式(7), 提取关于 $\operatorname{sn}(c\xi + h, m)$ 的不同幂次的系数, 可以将级数解重新表示为如下紧凑形式:

$$\begin{aligned} u &= \frac{b}{a} \frac{h}{c} - 6\alpha \left(\frac{b}{a}\right)^2 + c^2 \sum_{k=0}^{\infty} A_k \operatorname{sn}^{2k}(c\xi + h, m), \\ A_k &= \sum_{i=\max\{k,1\}}^{\infty} (a_{k,i}\theta + b_{k,i})[c^2\epsilon(\theta-1)]^{i-1} \left(\frac{a}{6b}\right)^{(2-n)i+n}, \end{aligned} \quad (19)$$

式中, $a_{k,i}$ 与 $b_{k,i}$ 只包含常数 m . 可以验证, 若 $\theta = 0$, 该级数解一定是近似对称法所得截断级数解.

该级数解的收敛性主要取决于 $|A_k|$, 显然 $|c^2\epsilon(\theta-1)|$ 愈小收敛性愈好, 减小 $|c^2|, |\epsilon|, |\theta-1|$

对收敛性的改善效果基本相同. 任意常数 a 和 b 对于收敛性的影响取决于 A_k 之中 $\left(\frac{a}{6b}\right)^{(2-n)i+n}$ 的幂次 $(2-n)i+n$. (1)当 $n \geq 3$ 时, 对于 $i \geq k$ 有 $(2-n)i < 0$, 此时, 增大 $|a/b|$ 改善收敛性; (2)当 $n=2$ 时, $(2-n)i+n=2$, 任意常数 a 和 b 与收敛性之间没有明显关系; (3)当 $n \leq 1$ 时, $(2-n)i > 0$, 此时, 减小 $|a/b|$ 改善收敛性.

4 比较与探讨

近似对称方法和同伦近似对称方法都是摄动法结合对称约化方法, 都能得出通式形式的约化解和相应约化方程. 不同之处主要是近似对称方法直接对原扰动微分方程进行级数展开, 同伦近似对称方法则是对于原扰动微分方程的同伦模型进行级数展开.

由于同伦模型既蕴含一个容易求解的微分方程, 又蕴含待求解的微分方程, 同伦参数由 0 到 1 的渐变恰好体现了这两个方程之间的密切联系, 而且辅助参数的存在也赋予同伦模型更大的优越性. 所以, 近似对称方法和同伦近似对称方法相比较, 显然后者具有明显的优势: 其一, 后者所得结果更加广泛, 能够包含前者所得结果; 其二, 辅助参数发挥着调节级数解收敛性的重要作用.

当然, 这些优点是以更加繁琐的计算为代价换来的, 因为同伦模型较待求解的微分方程形式更加复杂.

对于本文中的扰动 KP 方程(9), 考虑更一般的微扰项 $\epsilon \mathcal{P}(u) = \epsilon u_{x^{p-n}y^n}$, ($p \geq 6, n=0, 1, \dots, p$), 同伦近似对称法亦适用. 并且文献[20]给出结论: 仅当 p 为偶数时, 才可以解出约化方程的雅可比椭圆函数解以及原方程相应的雅可比椭圆函数级数解. 所以, p 为偶数时扰动 KP 方程的可解性强于 p 为奇数时的情况. 通过对各种扰动方程的进一步研究可以发现, 雅可比椭圆函数(或双曲正切函数)形式的级数解存在的必要条件是扰动项与最高阶导数项的导数阶数有相同奇偶性. 在某种程度上, 扰动非线性方程是否有雅可比椭圆函数(或双曲正切函数)形式的级数解可用于可解性优劣的判定. 关于可解性的全面的讨论见文献[21]. (同伦)近似对称方法用于求解雅可比椭圆函数(或双曲正切函数)

形式的级数解这一特点, 可以对各种扰动微分方程进行分类, 这是两种方法接下来需要应对的主要问题.

参考文献:

- [1] Cole J D. Perturbation Methods in Applied Mathematics [M]. Waltham Massachusetts: Blaisdell, 1968.
- [2] Bluman G W, Kumei S. Symmetries and Differential Equations[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
- [3] Olver P J. Applications of Lie Groups to Differential Equations[M]. New York: Springer, 1993.
- [4] Clarkson P A, Kruskal M D. New similarity reductions of the Boussinesq equation[J]. Journal of Mathematical Physics, 1989, 30(10):2201-2213.
- [5] Fushchich W I, Shtelen W M. On approximate symmetry and approximate solutions of the nonlinear wave equation with a small parameter[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1989, 22(18):L887-L890.
- [6] Baikov V A, Gazizov R K, Ibragimov N H. Approximate symmetries of equations with a small parameter[J]. Mathematics of the USSR-Sbornik, 1989, 64:427-441.
- [7] Pakdemirli M, Yürüsoy M, Dolapçı İ T. Comparison of approximate symmetry methods for differential equations [J]. Acta Applicandae Mathematicae, 2004, 80(3):243-271.
- [8] Wiltshire R. Two approaches to the calculation of approximate symmetry exemplified using a system of advection-diffusion equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2006, 197(2):287-301.
- [9] Jiao X Y, Yao R X, Lou S Y. Approximate similarity reduction for singularly perturbed Boussinesq equation via symmetry perturbation and direct method[J]. Journal of Mathematical Physics, 2008, 49(9):093505.
- [10] Jia M, Wang J Y, Lou S Y. Approximate symmetry reduction to the perturbed one-dimensional nonlinear Schrödinger equation[J]. Chinese Physics Letters, 2009, 26(2):020201.
- [11] Jiao X Y, Gao Y, Lou S Y. Approximate homotopy symmetry method: Homotopy series solutions to the sixth-order Boussinesq equation[J]. Science in China Series G: Physics, Mechanics and Astronomy, 2009, 52(8): 1169-1178.
- [12] Jiao X Y, Yao R X, Lou S Y. Approximate homotopy direct reduction method: Infinite series reductions to perturbed mKdV equations[J]. Chinese Physics Letters, 2009, 26(4):040202.

- [13] Liao S J. An explicit, totally analytic approximate solution for Blasius' viscous flow problems[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1999, 34(4): 759-778.
- [14] Liao S J. A simple way to enlarge the convergence region of perturbation approximations[J]. Nonlinear Dynamics, 1999, 19:93-110.
- [15] Liao S J, Campo A. Analytic solutions of the temperature distribution in Blasius viscous flow problems[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2002, 453:411-425.
- [16] Lyapunov A M. General Problem on Stability of Motion [M]. London: Taylor and Francis, 1992.
- [17] Karmishin A V, Zhukov A I, Kolosov V G. Methods of Dynamics Calculation and Testing for Thin-Walled Structures[M]. Moscow: Mashinostroyenie, 1990.
- [18] Adomian G. Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method[M]. Dordrecht: Springer Netherlands, 1994.
- [19] Kadomtsev B B, Petviashvili V I. On the stability of solitary waves in weakly dispersing media[J]. Soviet Physics Doklady, 1970, 15:539-541.
- [20] 焦小玉, 贾曼, 安红利. 一类扰动 Kadomtsev-Petviashvili 方程的雅可比椭圆函数解的收敛性探讨[J]. 物理学报, 2019, 68(14):140201.
- [21] Lou S Y. Consistent Riccati expansion and solvability[J]. Studies in Applied Mathematics, 2015, 134:372-402.

Introduction to approximate symmetry reduction

JIAO Xiaoyu

(School of Applied Mathematics, Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing 210023, China)

Abstract: By combining the methods of perturbation and symmetry reduction, approximate (homotopy) symmetry method is adopted to seek the series solutions to differential equations. Through applying symmetry reduction method to infinite number of approximate sub-equations resulted from perturbation expansion for differential equations or their homotopy models, it yields infinite number of reduction solutions and the related reduction equations with general formulae. The reduction equations can be used to further find the series truncated solutions to the original equations. The existence of series solutions reflects the solvability of original equations, which depends upon the consistency of the parity with respect to the derivative orders of perturbation terms and the terms with the highest derivative order.

Key words: perturbation method; symmetry reduction; direct method; approximate symmetry method; approximate homotopy symmetry method; solvability

(责任编辑 韩 超)