

形变映射法在求解非线性 Klein-Gordon 方程中的应用

——以 ϕ^4 方程和 ϕ^6 方程为例

贾 曼

(宁波大学 物理科学与技术学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 非线性 Klein-Gordon 方程在场论中具有十分重要的物理意义, 且通常是不可积的. 形变映射法利用场论中可积场方程的已知孤子解、周期解等共同特征, 通过建立一般特解间的联系来求解不可积场的新解析解. 形变映射法可以将一个非线性系统的某些重要的严格解和其他系统互相联系起来, 从而得到这些非线性系统的新类型严格解, 例如多个椭圆周期波的相互作用解或椭圆周期波和孤立波的相互作用解; 也可以利用系统自身的形变映射关系, 得到同一个系统不同解之间的形变映射关系, 从而得到系统的新严格解. 将严格解映射到系统自身, 就是系统的贝克隆变换.

关键词: 形变映射; 非线性 Klein-Gordon 方程; ϕ^4 方程; ϕ^6 方程; 贝克隆变换; 非线性叠加

中图分类号: O415

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2020) 05-0056-06

从 20 世纪中叶开始, 非线性科学的研究在全世界兴起, 科学家们建立了很多非线性模型, 特别是被称为可积系统的非线性模型, 并发展了很多方法来研究这些非线性模型的性质.

在众多的非线性模型中, 有一些特殊非线性系统, 它们虽然看起来完全不同, 但是在一些重要问题上具有明显的共性. 例如, 非线性 Klein-Gordon (NLKG) 方程与物理问题联系密切, 且对于孤立子理论的研究有着重要作用, 其一般形式可写为:

$$u_{tt} - \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} + F'(u) = 0,$$

不同的 $F'(u)$ 对应着不同的方程, 例如: 若

$$F'(u) = \lambda\phi + \mu\phi^3,$$

此时对应为 ϕ^4 方程; 如果

$$F'(u) = \lambda\phi + \mu\phi^3 + \xi\phi^5,$$

此时为 ϕ^6 方程; 若

$$F'(u) = \sin(u),$$

则为著名的 sine-Gordon 方程; 若

$$F'(u) = \frac{\alpha g}{2} \left[\sin\left(\frac{g}{2}u\right) - 2\eta \sin(gu) \right],$$

对应为双 sine-Gordon 方程; 而

$$F'(u) = \alpha_1 f + \alpha_2 f^3 + \alpha_3 f^{-3},$$

则为 Ginzburg-Landau 方程.

这些方程具有十分重要的物理意义. ϕ^4 和 ϕ^6 场模型是经典和量子场论中最重要的两个方程. 众所周知, 在规范场理论中引入 ϕ^4 模型, 可以解决非 Abelian 规范场的非零质量问题. ϕ^4 模型不仅在场论中具有基础地位, 而且在其他物理学分支以及其他学科^[1-10]中具有很重要的应用, 例如: 在统计力学中, ϕ^4 模型可用来描述势能和磁化函数的熵^[1]; 在宇宙学中, ϕ^4 模型可用来解释宇宙常数的小量^[10]. 而 ϕ^6 模型在量子场论、凝聚态物理以及固体物理等领域的应用也越来越广. 所以求解高维非线性 Klein-Gordon 模型变得极为重要且有意义.

早期的结果^[11]表明, 物理上最重要的局域激发模式(孤立波等)和周期波往往跟非线性 ϕ^4 场方

程的严格解有关系. 因此可以建立一种方法(即形变映射方法)将不同非线性系统的某些重要的严格解互相联系起来(映射关系), 从而使各种非线性系统的重要解可以同时得到解决.

通过大量的探索, 在对非线性系统的孤立子和周期解充分研究的基础上, 楼森岳教授成功地建立了 ϕ^4 场的严格解和非线性 Klein-Gordon 模型间的映射关系, 并由此得到了无穷多新的还无法用其他方法得到的非线性局域激发模式. 一些特殊类型的解, 例如非多周期波相互作用解以及周期波和孤立波的相互作用解, 可以很方便地得到.

在非线性系统严格解间的形变映射方法成功之后, 一个问题自然产生: 非线性系统的其他重要性质是否也可以利用形变映射方法来研究? 在大量的非线性系统中, 可积系统是其中最重要的能够严格求解的非线性系统. 在传统理论中, 是否存在自贝克隆变换(auto BT)被认为是刻画非线性系统可积性的重要判据. 而 ϕ^4 场等更多的实际非线性系统不是完全可积系统, 它们仍然存在大量的严格解. 因此, 利用形变映射关系寻找 ϕ^4 系统本身的形变映射, 从而得到 ϕ^4 系统不同解之间的形变映射关系, 这就是孤子理论中常用的自贝克隆变换. 利用自贝克隆变换, 可以得到 ϕ^4 系统更多类型的重要的严格解^[12-14]. 进一步, 如果得到了 ϕ^4 系统尽可能多的新严格解, 继续利用形变映射方法, 就可能同时得到其他非线性系统更丰富的有意义的严格解.

本文以 ϕ^4 和 ϕ^6 场模型为例进行说明. 第1节给出从 ϕ^4 到 ϕ^6 模型的形变映射关系. 第2节给出 ϕ^4 场模型的贝克隆变换(BT). 为简单起见, 只给出相关定理, 其证明略去. 第3节为小结和讨论.

1 从 ϕ^4 到 ϕ^6 模型的形变映射关系

(n+1)维 ϕ^6 模型方程为

$$\sum_{i=1}^n \Phi_{x_i x_i} - \Phi_{tt} + \lambda \Phi + \mu \Phi^3 + \xi \Phi^5 = 0, \quad (1)$$

而相应的 ϕ^4 模型方程为

$$\sum_{i=1}^n \phi_{x_i x_i} - \phi_{tt} + \lambda_0 \phi + \mu_0 \phi^3 = 0, \quad (2)$$

式中, λ 、 μ 、 ξ 、 λ_0 和 μ_0 都是模型参数, 可为任意常数. 不难发现, ϕ^4 模型和 ϕ^6 模型的严格解间

存在形变映射关系.

1.1 形变映射关系一

定理 1 如果 ϕ 是 ϕ^4 方程(2)的解, 且满足约束条件:

$$\sum_{i=1}^n \phi_{x_i}^2 - \phi_t^2 + \lambda_1 \phi^2 + \mu_1 \phi^4 + C_1 = 0, \quad (3)$$

那么

$$\Phi = \pm \sqrt{\frac{\phi + a_1}{b_1 \phi + c_1}} \quad (4)$$

是 ϕ^6 模型的解, 其中参数 a_1 、 b_1 、 c_1 、 λ_1 、 μ_1 和 C_1 与模型参数 λ 、 μ 和 ξ 满足如下关系:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_0, \\ \mu_1 &= \frac{1}{2} \mu_0, \\ C_1 &= -\lambda_0 a_1^2 - \frac{1}{2} \mu_0 a_1^4, \\ \lambda &= \frac{3\mu_0 a_1^2 (c_1 + a_1 b_1) + \lambda_0 (c_1 + 5a_1 b_1)}{4(c_1 - a_1 b_1)}, \\ \mu &= \frac{a_1 \mu_0 (c_1^2 + c_1 a_1 b_1 + a_1^2 b_1^2) + \lambda_0 b_1 (c_1 + 2a_1 b_1)}{a_1 b_1 - c_1}, \\ \xi &= \frac{3(c_1 + a_1 b_1)[(c_1^2 + a_1^2 b_1^2)\mu_0 + 2b_1^2 \lambda_0]}{8(c_1 - a_1 b_1)}. \end{aligned} \quad (5)$$

1.2 形变映射关系二

定理 2 如果 ϕ 满足 ϕ^4 方程(2)和如下限制方程:

$$\sum_{i=1}^n \phi_{x_i}^2 - \phi_t^2 + \lambda_2 \phi^2 + \mu_2 \phi^4 + C_2 = 0, \quad (6)$$

那么

$$\Phi = \pm \frac{1}{\sqrt{b_2 \phi^2 + c_2}} \quad (7)$$

是 ϕ^6 模型的解, 其中参数 b_2 、 c_2 、 λ_2 、 μ_2 和 C_2 由下式决定:

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \frac{1}{2} \mu_0, \\ \lambda &= -\frac{3}{2} \frac{c_2}{b_2} \mu_0 - \lambda_0 + 2\lambda_2, \\ \mu &= \frac{3c_2^2 \mu_0}{b_2} + 2b_2 C_2 + c_2 (\lambda_0 - 5\lambda_2), \\ \xi &= -\frac{3}{2} \frac{c_2^3 \mu_0}{b_2} - 3c_2 (C_2 b_2 - \lambda_2 c_2). \end{aligned} \quad (8)$$

1.3 形变映射关系三

定理 3 如果 ϕ 是 ϕ^4 模型(2)在限制条件

$$\sum_{i=1}^n \phi_{x_i}^2 - \phi_t^2 + \lambda_3 \phi^2 + \mu_3 \phi^4 + C_3 = 0 \quad (9)$$

下的解, 那么

$$\Phi = \pm \phi / \sqrt{b_3 \phi^2 + c_3} \quad (10)$$

以及满足如下条件的 λ_3 、 μ_3 、 C_3 、 b_3 和 c_3 是 Φ^6 模型的解:

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{3C_3 b_3}{c_3} + \lambda_0, \\ \mu &= \frac{6C_3 b_3^2}{c_3} + c_3 \mu_0 - b_3 (\lambda_0 + 3\lambda_3), \\ \xi &= -\frac{3b_3^3 C_3}{c_3} + 3b_3 (b_3 \lambda_3 - c_3 \mu_3). \end{aligned} \quad (11)$$

目前, 人们已经得到了 ϕ^4 模型很多有意义的严格解. 利用上述形变映射关系和 ϕ^4 模型已知解, 可以得到 Φ^6 模型新类型的波动结构.

1.4 Φ^6 模型解举例

可以证明, ϕ^4 模型存在一个特殊严格解:

$$\phi = \text{sn}(V, m), \quad (12)$$

式中, $\text{sn}(V, m)$ 为 Jacobi 椭圆函数,

$$V = f\left(\sum_{i=1}^n k_{1i} x_i + \omega_1 t\right) + \sum_{i=1}^n k_{0i} x_i + \omega_0 t \equiv f(\eta) + \eta_0, \quad (13)$$

$f(\eta)$ 是 η 的任意函数, 其中

$$\eta = \sum_{i=1}^n k_{1i} x_i + \omega_1 t, \quad (14)$$

参数 k_{0i} 、 k_{1i} 和 ω_0 、 ω_1 关系为

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n k_{1i}^2 - \omega_1^2 &= 0, \\ \sum_{i=1}^n k_{1i} k_{0i} - \omega_1 \omega_0 &= 0. \end{aligned}$$

利用形变映射关系二, 不难发现 Φ^6 模型存在下述严格解:

$$\Phi = \pm \frac{1}{\sqrt{b \text{sn}^2(V, m) + c}}, \quad (15)$$

其中参数满足

$$\begin{aligned} b &= \frac{3\mu m^2 \delta}{2(-m^2 \delta^2 + m^4 \delta^2 + \delta^2 - \lambda^2)}, \\ c &= -\frac{b(m^2 \delta + \delta - \lambda)}{3m^2 \delta}, \\ \xi &= \frac{\mu^2}{4} (-m^2 \delta + m^4 \delta^2 + \delta^2 - \lambda^2)^{-2} (m^2 \delta + \delta - \lambda) \times \end{aligned}$$

$$(\lambda - \delta + 2m^2 \delta)(-\lambda - 2\delta + m^2 \delta), \quad (16)$$

式中, δ 定义为

$$\delta \equiv \sum_{i=1}^n k_{0i}^2 - \omega_0^2.$$

可以看出, 当 $m < 1$ 时, Φ^6 模型的解(15)表示的是周期波和周期波之间的相互作用; 当 $m \rightarrow 1$ 时, 式(15)表示的是周期波和孤子之间的相互作用.

任意函数 $f(\eta)$ 的引入, 使得场方程存在着丰富的局域结构.

在得到 ϕ^4 场和 Φ^6 模型的形变关系^[14]的同时, 完整的多 ϕ^4 场与其他非线性场如李政道模型和多 sine-Gordon 场的形变映射关系^[15-16]也已经建立. 建立和完善形变映射方法可以同时严格求解一类重要的非线性标量场的物理激发.

2 ϕ^4 模型的 BT

通常的贝克隆变换是对可积系统而言的. 利用形变映射方法寻找 ϕ^4 系统本身的形变映射, 从而得到 ϕ^4 系统的不同解之间的形变映射关系, 就是 ϕ^4 系统的贝克隆变换. 利用不可积标量场 ϕ^4 场的特解的 BT, 可由一个特解得到大量新的特解. 利用上一项的形变映射方法可以得到其他非线性不可积标量场的大量新特解. 这里给出 ϕ^4 系统的几个特殊 BT.

2.1 ϕ^4 模型的 BT 定理

定理 4 如果 ϕ 是 ϕ^4 方程(2)在限制条件

$$(\tilde{\nabla} \phi)^2 - g(\phi) \equiv \sum_{i=1}^N \phi_{x_i}^2 - \phi_t^2 - g(\phi) = 0 \quad (17)$$

下的解, 那么

$$\phi_1 = \frac{\phi}{a + \sqrt{1 - \phi^2}} \quad (18)$$

也是 ϕ^4 模型的解, 其模型参数 $\{\lambda_1, \mu_1\}$ 和 $g(\phi)$ 之间的关系如下:

$$\begin{aligned} g(\phi) &= (1 - \phi^2)(2a\phi^2 - 3a - 3\sqrt{1 - \phi^2})^{-1} \times \\ &\quad [A\sqrt{1 - \phi^2} - a\mu_0\phi^4 + \\ &\quad (2a\mu_0 + 2a\lambda_1 - a\lambda_0)\phi^2 + 2a(\lambda_0 - \lambda_1)], \\ A &= (\mu_0 + a^2\mu_0 + \lambda_1 - \mu_1)\phi^2 + \\ &\quad (1 + a^2)(\lambda_0 - \lambda_1). \end{aligned} \quad (19)$$

需要说明的是, 如果 ϕ_1 的模型参数满足 $\lambda_1 = \lambda_0$ 和 $\mu_1 = \mu_0$, 那么(18)式给出的 BT 就是自贝克隆变换, 否则就是非自贝克隆变换.

定理 5 如果 ϕ 是 ϕ^4 模型在限制条件(17)下的解, 那么

$$\phi_2 = \frac{\sqrt{1+b\phi^2}}{a+\phi} \quad (20)$$

是模型参数为 $\{\lambda_2, \mu_2\}$ 的 ϕ^4 方程的解, 其中

$$\begin{aligned} g(\phi) &= (1+b\phi^2)(2+a^2b+3b\phi^2-2ab^2\phi^3)^{-1} \times \\ &\quad [A\phi^4 - ab\mu_0\phi^5 + C\phi^3 + B\phi^2 + \\ &\quad a(\lambda_0 + 2\lambda_2)\phi + \mu_2 + a^2\lambda_2], \\ A &= \mu_0(1-ba^2) + b\lambda_2 + b^2\mu_2, \\ B &= \lambda_2(1+ba^2) + \lambda_0(1-ba^2) + 2b\mu_2, \\ C &= a(\mu_0 + 2b\lambda_2 - b\lambda_0). \end{aligned} \quad (21)$$

定理 6 如果 ϕ 满足 ϕ^4 模型和限制条件(17), 那么

$$\phi_3 = \frac{b\phi + c}{\sqrt{1+a\phi^2}} \quad (22)$$

是模型参数为 $\{\lambda_3, \mu_3\}$ 的 ϕ^4 模型的解, 其中

$$\begin{aligned} g(\phi) &= (1+a\phi^2)(2ac\phi^2 - 3b\phi - c)^{-1} \times \\ &\quad [ac\mu_0\phi^4 + A\phi^3 + cB\phi^2 + \\ &\quad b(3c^2\mu_0 + \lambda_3 - \lambda_0)\phi + c(\lambda_3 + c^2\mu_3)], \\ A &= b(a\lambda_3 + b^2\mu_3 - \mu_0), \\ B &= a\lambda_0 + a\lambda_3 + 3b^2\mu_3. \end{aligned} \quad (23)$$

定理 7 如果 ϕ 是 ϕ^4 模型在限制条件(17)下的解, 那么

$$\phi_4 = \frac{b\phi + c}{a+\phi^2} \quad (24)$$

是模型参数为 $\{\lambda_4, \mu_4\}$ 的 ϕ^4 模型的解, 此时限制条件(17)中的 $g(\phi)$ 为

$$\begin{aligned} g(\phi) &= [2(ac + 3ab\phi - 3c\phi^2 - b\phi^3)]^{-1} \times \\ &\quad \{\phi(a + \phi^2)(\lambda_0 + \mu\phi^2)(ab - 2c\phi - b\phi^2) - \\ &\quad (c + b\phi)[\mu_4(c + b\phi)^2 + \lambda_4(a + \phi^2)]\}. \end{aligned} \quad (25)$$

定理 8 如果 ϕ 是 ϕ^4 模型在限制条件(17)下的解, 那么

$$\phi_5 = \frac{b\phi^2 + 1}{a + c\phi^2} \quad (26)$$

也是 ϕ^4 模型的解, 此时模型参数为 $\{\lambda_5, \mu_5\}$, 限制条件(17)中的 $g(\phi)$ 满足下式:

$$\begin{aligned} g(\phi) &= \frac{(1+b\phi^2)[\mu_5(1+b\phi^2)^2 + \lambda_5(a+c\phi^2)^2]}{(a-3c\phi^2)(ab-c)} - \\ &\quad \frac{(\lambda_0 + \mu\phi^2)(a+c\phi^2)\phi^2}{a-3c\phi^2}. \end{aligned} \quad (27)$$

将给出的新解代入相应的 ϕ^4 方程, 利用 $g(\phi)$ 满足的条件和 ϕ^4 模型本身, 即可直接证明上述 5 个定理.

虽然上面给出的 $g(\phi)$ 表达式较为复杂, 但可以证明, 在合适的参数下, $g(\phi)$ 有可能是 ϕ 的多项式.

上面给出的几个特殊形式的 BT, 可以用来从 ϕ^4 方程已知的特殊解寻求方程的新解. 这些 BT 通常是非自 BT. 非自 BT 指新解的模型参数与已知解的不同.

2.2 ϕ^4 模型的非线性叠加定理

BT 通常与非线性叠加相联系. 下面给出 ϕ^4 方程的非线性叠加公式, 也就是如何从 ϕ^4 模型的两个已知解得到新的严格解.

定理 9 如果 ϕ_1 和 ϕ_2 是 ϕ^4 模型在限制条件

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \phi_{1x_i x_i} - \phi_{1tt} &= \lambda_1 \phi + \mu_1 \phi^3, (\tilde{\nabla} \phi_1)^2 = g_1(\phi_1, \phi_2), \\ \sum_{i=1}^N \phi_{2x_i x_i} - \phi_{2tt} &= \lambda_2 \phi + \mu_2 \phi^3, (\tilde{\nabla} \phi_2)^2 = g_2(\phi_1, \phi_2), \\ (\tilde{\nabla} \phi_1) \cdot (\tilde{\nabla} \phi_2) &= \sum_{i=1}^N \phi_{1x_i} \phi_{2x_i} - \phi_{1t} \phi_{2t} = g_3(\phi_1, \phi_2) \end{aligned} \quad (28)$$

下的解, 那么 $\phi = g_0(\phi_1, \phi_2)$ 也是其解, 对应的模型参数为 $\{\lambda, \mu\}$, $g_0 \equiv g_0(\phi_1, \phi_2)$ 以及限制条件中的函数 $g_1 \equiv g_1(\phi_1, \phi_2)$, $g_2 \equiv g_2(\phi_1, \phi_2)$ 和 $g_3 \equiv g_3(\phi_1, \phi_2)$ 应满足条件:

$$\begin{aligned} g_1 g_{0\phi_1} + g_2 g_{0\phi_2} + g_3 g_{0\phi_1 \phi_2} + \phi_1 (\lambda_1 + \mu_1 \phi_1^2) g_{0\phi_1} + \\ \phi_2 (\lambda_2 + \mu_2 \phi_2^2) g_{0\phi_2} - g_0 (\lambda + \mu g_0^2) = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

原则上, 对于任意给定的 g_1 、 g_2 和 g_3 , 可以从限制条件中得到 ϕ_1 和 ϕ_2 , 再由式(29)得到 $\phi = g_0$. 也就是说, 只要知道了 ϕ^4 模型的两个特解(非任意解), 就可通过求解式(29)进行非线性叠加而得到新解.

与可积系统的一般叠加公式不同, 此处叠加定理通常是非自叠加. 即由 ϕ^4 模型的两个特解可以得到新解, 但这些解的模型参数可能不同.

为方便起见, 可以选取 g_1 、 g_2 和 g_3 具有简单的多项式形式. 例如, 选取 $g_3 = 0$, g_1 和 g_2 为如下形式的多项式:

$$g_1 = \lambda_1 \left(\phi_1^2 + \frac{\mu}{\lambda} \phi_1^4 + \frac{\lambda}{2\mu} \right),$$

$$g_2 = (\lambda - \lambda_1) \left(\phi_2^2 + \frac{\mu}{\lambda} \phi_2^4 + \frac{\lambda}{2\mu} \right),$$

于是可以得到 ϕ^4 模型的一个特殊有理解

$$\phi = g_0 = \frac{\lambda(\phi_1 + \phi_2)}{\lambda - \mu\phi_1\phi_2}.$$

和 Φ^6 模型类似, 也可以在 ϕ^4 模型的严格解中引入任意函数, 从而得到丰富的局域结构, 例如扭结型曲线孤波结构、曲线孤波与周期波和准周期波的相互作用等, 这里不作详细说明。

3 结论

本文以 ϕ^4 模型和 Φ^6 模型为例, 说明如何利用形变映射法求解非线性 Klein-Gordon 场方程. 利用 ϕ^4 模型的严格解和其他不可积场模型间的形变映射法, 比较容易地从 ϕ^4 模型的一个已知解, 得到另一个场方程新的类型的严格解. 特别是由于任意函数的引入, 发现非线性 Klein-Gordon 场方程存在着丰富的解的结构, 例如多个椭圆周期波的相互作用解或椭圆周期波和孤立波的相互作用解。

在此基础上, 进一步给出了从 ϕ^4 模型本身到模型新的严格解的形变映射关系, 这就是孤子理论中常用的研究方法——贝克隆变换. 通常来说, 贝克隆变换是对可积系统而言的. 利用形变映射关系, 即使对不可积系统, 也建立了模型的贝克隆变换. 由于 ϕ^4 模型和其他非线性 Klein-Gordon 场方程间的映射关系, ϕ^4 模型新的严格解的给出会使上述场方程存在着更多类型的严格解。

虽然形变映射方法的首篇论文^[11]发表已逾 30 年, 但是人们对它的关注度有增无减. 最新的研究结果表明, 随着对场论和粒子物理的深入研究, 不但形变映射法本身, 而且利用形变映射法给出的结果都得到了广泛关注^[17-19]. 借助于这一简单的方法, 可以解决某些重要非线性激发模式之间的关系问题。

参考文献:

- [1] Lou S Y, Ni G J. Gaussian-effective-potential method for $SU(2) \times U(1)$ gauge theory and bounds on Higgs-boson mass[J]. Physical Review D, 1989, 40(9):3040-3045.
- [2] Hahn I, Kastner M. The mean-field ϕ^4 model: Entropy, analyticity, and configuration space topology[J/OL]. Physical Review E, 2005, 72(5):056134 [2018-03-24]. <https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.72.056134>.
- [3] Arrizabalaga A, Smit J, Tranberg A. Equilibration in ϕ^4 theory in 3+1 dimensions[J/OL]. Physical Review D, 2005, 72(2):025014 [2017-08-13]. <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.72.025014>.
- [4] Marchesoni F, Gammaitoni L, Bulsara A R. Spatio-temporal stochastic resonance in a ϕ^4 model of kink-antikink nucleation[J]. Physical Review Letters, 1996, 76(15):2609-2612.
- [5] Kleinert H. Order of superconductive phase transition[J]. Condensed Matter Physics, 2005, 8(1):75-86.
- [6] Shalaev B N. The strong-weak coupling symmetry in 2D Φ^4 field models[J]. Condensed Matter Physics, 2005, 8(1): 113-122.
- [7] Alicea J, Motrunich O I, Hermele M, et al. Criticality in quantum triangular antiferromagnets via fermionized vortices[J/OL]. Physical Review B, 2005, 72(6):064407 [2017-06-07]. <https://journals.aps.org/prb/abstract/10.1103/PhysRevB.72.064407>.
- [8] Hasenbush M, Pelissetto A, Vicari E. Instability of O(5) multicritical behavior in SO(5) theory of high- T_c superconductors[J/OL]. Physical Review B, 2005, 72(1): 014532 [2017-09-22]. <https://journals.aps.org/prb/abstract/10.1103/PhysRevB.72.014532>.
- [9] Inagaki T, Nojiri S, Odintsov S D. The one-loop effective action in ϕ^4 theory coupled non-linearly with the power of the curvature and the dynamical origin of the cosmological constant[J/OL]. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2005(6):010 [2016-04-21]. <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2005/06/010>.
- [10] Gratton S, Turok N. Langevin analysis of eternal inflation[J/OL]. Physical Review D, 2005, 72(4):043507 [2017-05-24]. <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.72.043507>.
- [11] Lou S Y, Ni G J. The relations among a special type of solutions in some (D+1)-dimensional nonlinear equations [J]. Journal of Mathematical Physics, 1989, 30(7):1614-1620.
- [12] Jia M, Huang F, Lou S Y. Special Backlund transformations and nonlinear superpositions for the non-integrable ϕ^4 field model[J]. Physica Scripta, 2006, 73(4): 368-376.
- [13] Jia M, Lou S Y. New types of exact solutions for (N+1)-dimensional ϕ^4 model[J]. Communications in Theoretical Physics, 2006, 46(1):91-96.
- [14] Jia M, Lou S Y. New deformation relations and exact

- solutions of the high-dimensional Φ^6 field model[J]. Physics Letters A, 2006, 353(5):407-415.
- [15] Hu H C, Lou S Y, Chow K W. New interaction solutions of multiply periodic, quasi-periodic and non-periodic waves for the $(n+1)$ -dimensional double sine-Gordon equations[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2007, 31(5): 1213-1222.
- [16] Hu H C, Lou S Y. New interaction solutions of periodic waves and solitary waves for the $(n+1)$ -dimensional double sinh-Gordon equation[J]. Physica Scripta, 2007, 75(1):34-40.
- [17] Yurova A A, Yurov A V. The generalized Fubini instanton[J]. Physics Letters A, 2008, 372(23): 4222-4229.
- [18] Khare A, Saxena A. Complex PT-invariant cnoidal and hyperbolic solutions of several real nonlinear equations [J/OL]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2018, 51(17):175202 [2018-11-23]. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1751-8121/aab4d8>.
- [19] Khare A, Saxena A. Novel PT-invariant solutions for a large number of real nonlinear equations[J]. Physics Letters A, 2016, 380(7/8):856-862.

Application of deformation relations in solving nonlinear Klein-Gordon field models

JIA Man

(School of Physical Science and Technology, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: The nonlinear Klein-Gordon equations play an important role in field theory and are usually considered non-integrable. Based on the common characters of the known soliton solutions and periodic solutions to the integrable equations in field theory, deformation mapping method is constructed to find the new exact solutions of the non-integrable equations. Deformation mapping method connects some important exact solutions of a nonlinear system to those of the other nonlinear systems, thus the new type solutions of those systems can be found, such as the cnoidal periodic-periodic interaction waves and periodic-solitary interaction waves. The mapping relations also connect different exact solutions of a system so that new exact solutions to the same system are constructed. By transforming the old solutions to the new solutions of the same system, the deformation mapping relations become the Bäcklund transformations of the system.

Key words: deformation relations; nonlinear Klein-Gordon equation; ϕ^4 field model; Φ^6 equation; Bäcklund transformation; nonlinear superpositions

(责任编辑 韩 超)