

KdV 方程的孤子-椭圆周期波解及其准孤立子行为

王建勇

(衢州学院 教师教育学院, 浙江 衢州 324000)

摘要: 以 KdV 方程为例讨论了孤子-椭圆周期波解的准孤立子行为及其相互作用性质. 首先应用推广的 tanh 函数展开法构造了 KdV 方程的孤子-椭圆周期波解及其准孤立子极限, 并由孤子-椭圆周期波解的“穿衣服”结构给出了周期波的相移公式. 此外, 结合国内外研究前沿, 讨论了该解的物理应用.

关键词: KdV 方程; 孤子-椭圆周期波解; 准孤立子行为; 推广的 tanh 函数展开法

中图分类号: O411.1

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2020) 05-0062-06

近几十年来, 孤立波结构与小振幅周期波间的相互作用现象引起了物理学家的广泛兴趣. 如在流体力学中, Farmer 等^[1]在加拿大某海湾观测到了类孤立波结构与小振幅周期波之间的相互作用现象, 具体观测图像由 Akylas 等^[2]给出. Davis 等^[3]在实验室中观测到孤立波和小振幅周期波之间的相互作用现象, 实验观测表明反向运动的孤立波和小振幅周期波间的相互作用是弹性的. 而在凝聚态物理中, Bishop 等^[4]通过数值研究发现小振幅振荡可弹性穿透静止扭结. 此外, 在粒子物理^[5]、等离子体物理^[6]、非线性光学^[7]中也可观察到类似现象.

另一方面, 可积系统理论中关于非线性相互作用波激发模式的精确解研究日趋成熟, 成绩斐然. 2012 年, 楼森岳教授等^[8-10]提出了非局域对称的局域化及其对称约化方法. 在此基础上, 楼森岳教授又提出了推广的 Painlevé 截断展开法^[11]和 tanh 函数展开法^[12], 应用这些方法可有效给出若干非线性演化方程的孤子与其他类型非线性波的相互作用解. 此外, 唐晓艳教授等^[13]采用非局域对称的局域化方法给出了 sine-Gordon (sG) 方程具有周期波背景的拓扑孤立子解; 由与 Bäcklund 变换相关的非局域对称出发, 林机教授等^[14]给出了 KdV-sG 系统的相互作用波解; 陈勇教授等^[15]构造 AKNS

等系统的非局域对称及相关的孤子-椭圆周期波解; 基于 CTE 方法, 李彪教授等^[16]给出了爆破孤子方程等非线性模型的孤子-椭圆周期波解.

本文以 KdV 方程为例讨论孤子-椭圆周期波解的准孤立子行为及其相互作用性质, 并结合国内外研究进展, 讨论了该解的物理应用.

1 KdV 方程的孤子-椭圆周期波解

一般情况下, KdV 方程可写为:

$$u_t + Au u_x + Bu_{xxx} = 0, \quad (1)$$

其中, A 为非线性系数; B 为色散系数; 两者由具体物理参数决定. 根据推广的 tanh 函数展开法, KdV 方程的解有如下双曲正切函数截断展开:

$$u = u_0 + u_1 \tanh(w) + u_2 \tanh(w)^2, \quad (2)$$

其中, u_i 和 w 都是关于 (x, t) 的待定函数. 将截断展开式(2)代入到 KdV 方程, 由 tanh 函数各幂次的系数, 可求得 u_2 、 u_1 、 u_0 以及 w 的满足的相容性方程. 相应地, KdV 方程的解可写为:

$$u = \frac{B}{A} [12(w_{xx} \tanh(w) + w_x^2 \tanh(w)^2) - \frac{w_t}{Bw_x} + \frac{4w_{xxx}}{w_x} - \frac{3w_{xx}^2}{w_x^2} - 8w_x^2]. \quad (3)$$

由 $\tanh(w)^2$ 的系数方程, 可得到关于 w 的相容性方程:

$$\frac{w_t}{w_x} + B \left(\frac{w_{xxx}}{w_x} - \frac{3w_{xx}^2}{2w_x^2} - 2w_x^2 \right) + \lambda = 0, \quad (4)$$

其中, λ 为积分常数. 为求得 KdV 方程的孤子-椭圆周期波解, 可将相容性方程式(4)的解设为:

$$\begin{aligned} w &= \xi + c_1 \operatorname{arctanh}(c_2 \operatorname{sn}(\eta, m)), \\ \xi &= \frac{x - v_1 t}{W_1}, \\ \eta &= \frac{x - v_2 t}{W_2}, \end{aligned} \quad (5)$$

其中, sn 为雅克比椭圆正弦函数; m 为其模数; v_1 、 v_2 分别为孤立波和椭圆周期波的速度; W_1 为孤立波的特征宽度; W_2 与周期波波长相关. 将关于 w 的假设式(5)代入的相容性方程式(4), 可求得:

$$\begin{aligned} W_1 &= \sqrt{\frac{8B(1-m^2)}{v_1 - v_2}}, \\ W_2 &= \sqrt{\frac{2B(1-m^2)}{v_1 - v_2}}, \\ \lambda &= \frac{(m^2 - 5)v_1 + (3m^2 + 1)v_2}{4(m^2 - 1)}, \\ c_1 &= \frac{\delta}{2}, c_2 = m, \delta^2 = 1. \end{aligned} \quad (6)$$

将式(5)~(6)代入式(3), 可给出 KdV 方程的孤子-椭圆周期波解为^[17]:

$$\begin{aligned} u &= \frac{3(v_1 - v_2)}{2AG^2} \left[\frac{(m^2 - 1 + 2G)^2}{(m^2 - 1)} \tanh(w)^2 - \right. \\ &\quad \left. 2\delta m S(m^2 - 1 + 2G) \tanh(w) + m^2 - 1 \right] - \\ &\quad \frac{(m^2 + 7)v_1 - (3m^2 + 5)v_2}{2A(m^2 - 1)}, \end{aligned} \quad (7)$$

其中, $S \equiv \operatorname{sn}(\eta, m)$, $C \equiv \operatorname{cn}(\eta, m)$, $D \equiv \operatorname{dn}(\eta, m)$, $G = 1 - m^2 S^2 + \delta m C D$.

孤子-椭圆周期波解可视为“穿衣服”孤子, 即由椭圆周期波围绕的孤子. 若孤子-椭圆周期波脱去“衣服”, 可退化为类孤子结构. 在式(7)中, 取极限 $\tanh(w) = \pm 1$, 可得孤子两侧的椭圆周期波, 左侧为:

$$\begin{aligned} C_L &= \frac{3(v_1 - v_2)(1 + \delta m S_n)(m^2 - 1 + 2G)}{AG^2} + \\ &\quad \frac{(5 - m^2)v_1 + (3m^2 - 7)v_2}{2A(m^2 - 1)}, \\ x - v_1 t &< 0, \end{aligned} \quad (8)$$

右侧为:

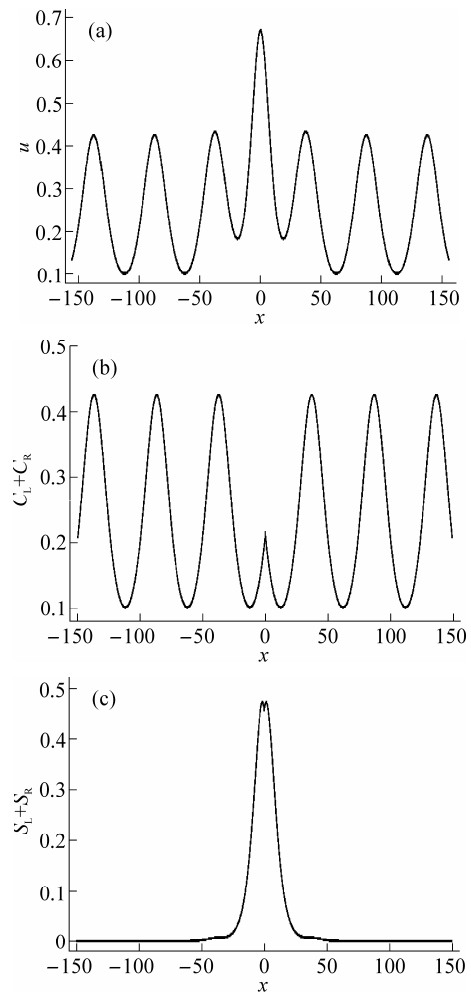
$$\begin{aligned} C_R &= \frac{3(v_1 - v_2)(1 - \delta m S_n)(m^2 - 1 + 2G)}{AG^2} + \\ &\quad \frac{(5 - m^2)v_1 + (3m^2 - 7)v_2}{2A(m^2 - 1)}, \\ x - v_1 t &> 0. \end{aligned} \quad (9)$$

移除周期波背景后的孤子结构为:

$$S_L = u - C_L, x - v_1 t < 0, \quad (10)$$

$$S_R = u - C_R, x - v_1 t > 0. \quad (11)$$

下面由图例来说明孤子-椭圆周期波“穿衣服”结构. 图 1(a)是由式(7)在 $t = 0$ 时刻给出的孤子-椭圆周期波, 图 1(b)是由式(8)~(9)给出的位于孤子两侧的椭圆周期波, 图 1(c)是移去周期波背景后由式(10)~(11)给出的孤子结构. 显然, 图 1(b)和(c)的叠加为图 1(a). 由图 1(b)可知, 位于孤子左侧和右侧



(a)孤子-椭圆周期波; (b)孤子两侧的椭圆周期波; (c)移去背景波后的孤子结构. 参数为 $m = 0.3$, $v_1 = 0.1$, $v_2 = 0.05$, $\delta = 1$, $A \approx 0.304$ 及 $B = 1.653$.

图1 孤子-椭圆周期波的“穿衣服”结构

的椭圆周期波的振幅、波长相同,两者之间仅存在相位差.

由孤子-椭圆周期波的“穿衣服”结构出发,还可给出椭圆周期波的相移.图1中,孤子和椭圆周期波都是右行的,且孤子速度大于椭圆周期波速度.在 $t=0$ 时刻,图1(a)中,孤子左侧的椭圆周期波已经与孤子发生相互作用,而右侧的椭圆周期波则未发生相互作用.这说明在图1(b)中,孤子两侧的椭圆周期波的相位差是由与孤子碰撞引起的.与孤子相互作用后的椭圆周期波可由式(8)表示,未与孤子相互作用的椭圆周期波可由式(9)表示.由式(8)~(9),可给出椭圆周期波的相移公式:

$$\Delta_c = 2W_2 K(m) = \frac{\lambda_c}{2} = \sqrt{\frac{8B(1-m^2)}{v_1 - v_2}} K(m), \quad (12)$$

其中, λ_c 是椭圆周期波的波长; $K(m)$ 是第一类完全椭圆积分.应用雅克比椭圆函数周期性公式,可直接验证相移公式(12).并由此可知,椭圆周期波与孤子发生相互作用后发生半波损失,且此结论对孤子-椭圆周期波相互作用是普适的.由椭圆周期波的相移公式(12)可知,KdV方程中椭圆周期波的相移只和模数 m 、色散项系数 B 、孤子和周期波间的相对速度 $v_1 - v_2$ 有关.

2 准孤子行为——nanopterion 极限

应用经典的 $\tanh$ 函数展开法,可给出KdV方程的单孤子解为:

$$u = \frac{1}{AW^2} [8B + vW^2 - 12B \tanh^2(\xi)], \quad (13)$$

其中, $\xi = (x - vt)/W$, v 为孤子运动速度以及 W 是孤子特征宽度.由零边界条件 $\xi \rightarrow \pm\infty$, $u_\xi \rightarrow 0$, $u_{\xi\xi} \rightarrow 0$,可得经典孤子解:

$$u = \frac{3V}{A} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x - vt}{W}\right), \quad W = \sqrt{\frac{4B}{v}}. \quad (14)$$

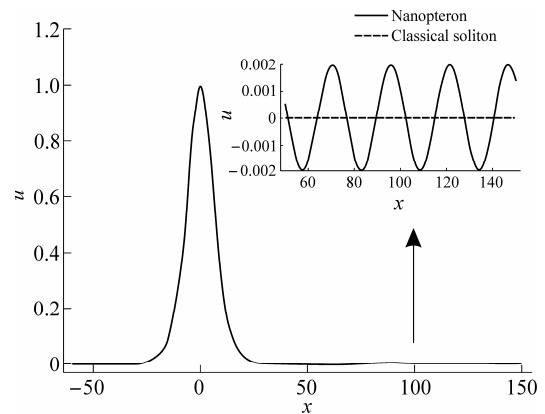
显然,推广的 $\tanh$ 函数展开法和未推广 $\tanh$ 函数展开法之间有着紧密的联系.在式(3)中,若将 w 取为直线解,即 $w = (x - vt)/W$,则由式(3)可求得单孤子解式(13).

在极限条件 $m=0$, $v_1=v$ 以及 $v_2=-v$ 下,孤子-椭圆周期波参数(6)退化为:

$$W_1 = \sqrt{\frac{4B}{v}}, W_2 = \sqrt{\frac{B}{v}}, \lambda = \frac{3v}{2}, c_1 = \frac{\delta}{2}, c_2 = 0. \quad (15)$$

在此条件下,孤子-椭圆周期波解(7)也退化为经典孤子解(14).即在极限条件 $m=0$, $v_1=v$ 及 $v_2=-v$ 下,由 w 的相容性方程(4)也可定出孤子的特征宽度为 $W_1 = \sqrt{4B/V}$.由此极限行为,可考虑孤子-椭圆周期波解(7)在 $v_1=v$, $v_2=-v$ 及 $m \rightarrow 0$ 下的渐进行为.在渐进条件 $v_1=v$, $v_2=-v$ 及 $m \rightarrow 0$ 下,孤子-椭圆周期波中的孤子核接近于KdV方程的经典孤子解(14),而围绕在孤子周围的椭圆周期波则趋向于在零附近的小振幅正余弦波,此准孤子行为即是nanopterion结构^[18].此外,在此极限下,第一类完全椭圆积分 $K(m)$ 趋向于 $\pi/2$,小振幅周期波的相移可近似取为 $W_2\pi$.

图2给出了在 $t=0$ 时刻,模数 m 为0.001的准孤子与经典孤子解的比较,其中,准孤子由式(7)给出,经典孤子由式(14)给出.由图可知,在较大空间尺度,准孤子与经典孤子的图像重合.当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时,经典孤子以指数形式迅速趋向于零.然而,当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时,准孤子的“尾巴”只是很小,并未消失.由图2右上方小图可知,在小空间尺度内,准孤子的“尾巴”并不绝对趋向于零,而是在零附近做小振幅的周期振荡.

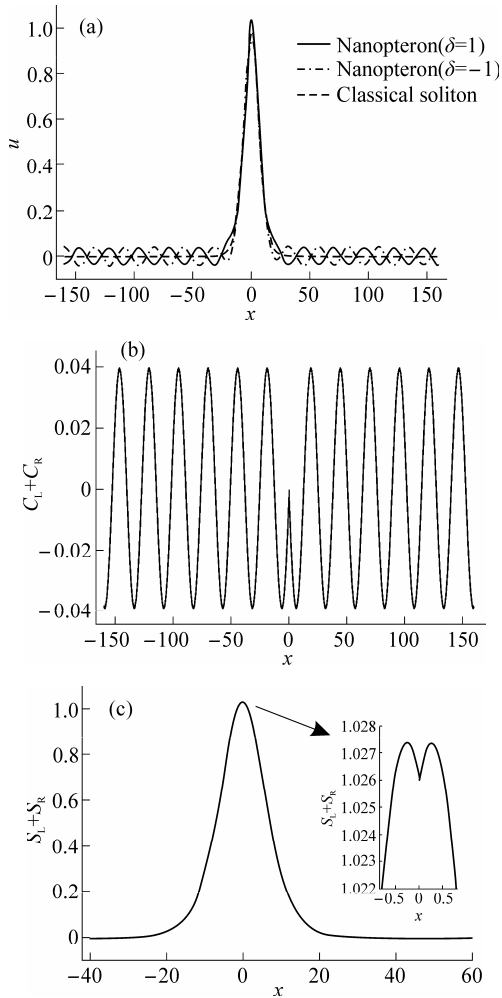


参数为 $v=0.1$, $m=0.001$ 及 $\delta=1$, $A \approx 0.304$ 及 $B \approx 1.653$.

图2 模数 $m=0.001$ 时,准孤子结构与经典孤子解的比较

若将模数 m 取得略大一些,准孤子明显出现“尾巴”.图3(a)给出了在 $t=0$ 时刻,模数为0.02及参数 $\delta=\pm 1$ 的准孤子与经典孤子的比较.由3(a)图可观测到准孤子的孤子核和经典孤子大体重合,略有差别.当 $\delta=1$ 时,准孤子的孤子核比经典孤子略高略瘦.当 $\delta=-1$ 时,准孤子的孤子核比经典孤子略矮略胖.另外, $\delta=\pm 1$

的准孤子在 $x \rightarrow \pm\infty$ 时, 其“尾巴”即小振幅周期波的波峰和波谷具有一一对应的关系. 图 3(b)和图 3(c)是模数 $m = 0.02$ 及波参数 $\delta = 1$ 时准孤子的“穿衣服结构”. 其中, 图 3(b)是准孤子的小振幅周期波背景. 由图 3(b)可明显地观察到孤子左侧和右侧的周期波的相位差是半波长, 与由相移公式 $W_2\pi \approx 12.77$ 一致. 图 3(c)是准孤子移去小振幅周期波后剩下的孤子核, 此孤子核接近于经典孤子.



(a) $\delta = \pm 1$ 的准孤子经典孤子解的比较. (b) $\delta = 1$ 时, 孤子两侧的小振幅背景周期波; (c) $\delta = 1$ 时, 准孤子移去小振幅周期波后剩下的孤子结构; 参数为 $m = 0.02$, $\nu = 0.1$, $A \approx 0.304$ 及 $B \approx 1.653$.

图3 准孤子与经典孤子的比较及准孤子的“穿衣服”结构

3 离子声准孤子激发

在均匀冷离子-超热电子-超热质子等离子体

中, 若忽略离子热压强, 则描述离子声波动力学行为的方程组包括连续性方程、动量方程及泊松方程:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial(n_i u_i)}{\partial x} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = n_e - p n_p - (1-p) n_i, \quad (18)$$

其中, u_i 是经离子声速 $C_s = (Te/m_i)^{1/2}$ 无量纲化后的离子流速; n_i 、 n_e 及 n_p 是无量纲化后的粒子数密度. 在慢离子时间尺度, 电子质子间的湮灭效应可忽略, 可假设超热电子及超热质子遵循 κ 分布:

$$n_e = \left(1 - \frac{\phi}{\kappa_e - 3/2}\right)^{-\kappa_e + \frac{1}{2}},$$

$$n_p = \left(1 + \frac{\sigma \phi}{\kappa_p - 3/2}\right)^{-\kappa_p + \frac{1}{2}}, \quad (19)$$

其中, 参数 κ_e 及 κ_p 是表征粒子分布偏离麦克斯韦分布的物理参量; 当 $\kappa \rightarrow \infty$ 时, 粒子分布为麦克斯韦分布. 时间变量和空间变量分别经离子等离子体频率倒数 $\omega_{pi}^{-1} = \sqrt{m_i / (4\pi n_{e0} e^2)}$ 和德拜长度 $\lambda_{De} = \sqrt{T_e / (4\pi n_{e0} e^2)}$ 无量纲化. $\sigma = T_e / T_p$ 是电子-质子温度之比, $p = n_{p0} / n_{e0}$ 是质子-电子粒子数密度比, ϕ 是经 T_e / e 无量纲化的离子声波电势.

对于有限小振幅波 $e\phi / T_e \ll 1$, 泊松方程可做如下近似展开:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = (1-p)(1-n_i) + a_\kappa \phi + \frac{1}{2} b_\kappa \phi^2, \quad (20)$$

其中,

$$a_\kappa = \frac{2\kappa_e - 1}{2\kappa_e - 3} + \frac{(2\kappa_p - 1)p\sigma}{2\kappa_p - 3}, \quad (21)$$

$$b_\kappa = \frac{4\kappa_e^2 - 1}{(2\kappa_e - 3)^2} - \frac{(4\kappa_p^2 - 1)p\sigma^2}{(2\kappa_p - 3)^2}. \quad (22)$$

引入时空变换:

$$\xi = \epsilon^{1/2}(x - Vt), \quad \tau = \epsilon^{3/2}t, \quad (23)$$

其中, ϵ 是描述弱色散效应的无穷小参数; V 是离子声波和慢离子声波的相速度. 并将所有变量在平衡态附近按 ϵ 的幂次展开:

$$n_i = 1 + \epsilon n_1 + \epsilon^2 n_2 + \dots, \quad (24)$$

$$\phi = \epsilon \phi_1 + \epsilon^2 \phi_2 + \dots, \quad (25)$$

$$u_i = \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots \quad (26)$$

应用多重尺度法, 可导出描述离子声波动力学行为的 KdV 方程:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \tau} + A \phi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} + B \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial \xi^3} = 0, \quad (27)$$

其中, 非线性系数 A 及色散系数 B 分别为:

$$A = \frac{3}{2V} - \frac{b_\kappa V^3}{2(1-p)}, \quad B = \frac{V^3}{2(1-p)}. \quad (28)$$

在此以超热电子分布参数 κ_e 为例, 说明等离子体物理参数对离子声准孤立子的影响. 图 4 中, 分别取 κ_e 为 2、5 及 50, 由图可知当 κ_e 增大时, 孤子和椭圆周期波的振幅都增大, 孤子特征宽度增加, 椭圆周期波的波长也增加. 当 $\kappa_e \rightarrow \infty$ 时, 电子的分布为麦克斯韦分布, 孤子和椭圆周期波的振幅、孤子特征宽度、椭圆周期波波长都达到最大值. 此现象也可从物理上解释, 因离子声波的驱动力是由电子的热压强提供, κ_e 增大的过程即是电子热压强增加的过程, 从而使孤子和椭圆周期波的振幅都增大, 孤子特征宽度增加, 椭圆周期波波长增加.

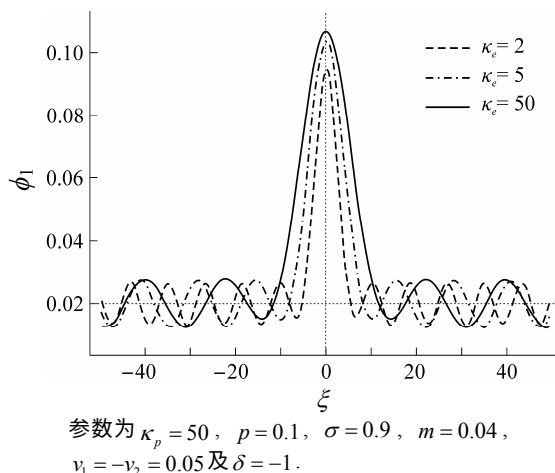


图 4 超热电子分布参数 κ_e 对离子声准孤立子的影响

4 总结与讨论

本文讨论了 KdV 方程的孤子-椭圆周期波解及其准孤立子极限, 并发现孤立子和椭圆周期波的相互作用不仅是弹性的, 且椭圆周期波在相互作用后发生半波损失.

文中给出的准孤立子解具有明确的物理意义, 如 Alam 等^[19]应用该解讨论了 (A_r^+, SF^-) 及 (A_r^+, F^-) 等离子体中离子声准孤立子的激发现象, 研究表

明超热电子占比及离子质比对波形具有显著影响. 此外, 我们也在在此基础上展开了进一步研究, 给出了 KdV 方程具有准孤立子行为的另一组孤子椭圆周期波解, 并讨论了均匀磁化等离子体中的电子分布及磁场大小与方向对离子声准孤立子波形的影响^[20].

但一些问题有待进一步研究, 例如: (1)其他非线性方程, 如非线性 Schrödinger 方程、KP 方程、Sine-Gordon 方程的孤子-椭圆周期波解的准孤立子极限及其稳定性分析. (2)本文指出了关于 w 的相容性方程和边界条件之间的联系, 但其内在物理意义尚不清楚. (3)本文研究发现椭圆周期波与孤子相互作用后相移是半波长, 而且这个结论是普适的, 那进一步的物理解释是什么? (4)在其他物理系统中, 如 Kim 等^[21]从数值和实验角度研究了单列周期性排列木桩结构中的非线性激发现象, 观测表明赫兹局部共振的木桩晶格是形成行波的关键, 且该行波具有准孤立子结构. 此类物理系统中, 准孤立子激发的解析描述有待进一步研究.

参考文献:

- [1] Farmer D M, Smith J D. Tidal interaction of stratified flow with a sill in Knight Inlet[J]. Deep Sea Research Part A: Oceanographic Research Papers, 1980, 27(3/4): 239-254.
- [2] Akylas T R, Grimshaw R H J. Solitary internal waves with oscillatory tails[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1992, 242:279-298.
- [3] Davis R E, Acrivos A. Solitary internal waves in deep water[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1967, 29(3):593-607.
- [4] Bishop A R, Krumhansl J A, Trullinger S E. Solitons in condensed matter: A paradigm[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1980, 1(1):1-44.
- [5] Segur H, Kruskal M D. Nonexistence of small-amplitude breather solutions in ϕ_4 theory[J]. Physical Review Letters, 1987, 58(8):747-750.
- [6] Keane A J, Mushtaq A, Wheatland M S. Alfvén solitons in a Fermionic quantum plasma[J]. Physical Review E, 2011, 83(6):066407.
- [7] Branis S V, Martin O, Birman J L. Discrete velocities for solitary-wave solutions selected by self-induced transparency[J]. Physical Review A, 1991, 43(3):1549-1563.

- [8] Gao X N, Lou S Y, Tang X Y. Bosonization, singularity analysis, nonlocal symmetry reductions and exact solutions of supersymmetric KdV equation[J]. Journal of High Energy Physics, 2013, 2013(5):1-29.
- [9] Cheng X P, Chen C L, Lou S Y. Interactions among different types of nonlinear waves described by the Kadomtsev-Petviashvili equation[J]. Wave Motion, 2014, 51(8):1298-1308.
- [10] Cheng X P, Lou S Y, Chen C L. Interactions between solitons and other nonlinear Schrödinger waves[J]. Physical Review E, 2014, 89(4):43202.
- [11] Chen C L, Lou S Y. CTE Solvability and exact solution to the Broer-Kaup system[J]. Chinese Physics Letters, 2013, 30(11):110202.
- [12] Lou S Y. Consistent Riccati expansion for integrable systems[J]. Studies in Applied Mathematics, 2015, 134(3): 372-402.
- [13] Tang X Y, Liang Z F, Wang J Y. Nonlocal topological solitons of the sine-Gordon equation[J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2015, 48(28): 285204.
- [14] Lin J, Jin X W, Gao X L, et al. Solitons on a periodic wave background of the modified KdV-Sine-Gordon equation[J]. Communications in Theoretical Physics, 2018, 70(2):119-126.
- [15] Miao Q, Xin X P, Chen Y. Nonlocal symmetries and explicit solutions of the AKNS system[J]. Applied Mathematics Letters, 2014, 28:7-13.
- [16] Cheng W G, Li B, Chen Y. Nonlocal symmetry and exact solutions of the (2+1)-dimensional breaking soliton equation[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2015, 29(1/2/3):198-207.
- [17] Wang J Y, Tang X Y, Lou S Y, et al. Nanopteron solution of the Korteweg-de Vries equation[J]. EPL: Europhysics Letters, 2014, 108(2):20005.
- [18] Boyd J P. A numerical calculation of a weakly non-local solitary wave: the ϕ_4 breather[J]. Nonlinearity, 1990, 3(1): 177-195.
- [19] Alam M S, Talukder M R. Interaction phenomena of ion-acoustic Quasi-solitons and classical-solitons in three component plasma[J]. Contributions to Plasma Physics, 2019, 59(8):e201800163.
- [20] Wang J Y, Cheng X P, Zeng Y, et al. Quasi-soliton solution of Korteweg-de Vries equation and its application in ion acoustic waves[J]. ACTA Physical Sinica, 2018, 67:110201.
- [21] Kim K, Li F, Chong C, et al. Highly nonlinear wave propagation in elastic woodpile periodic structures[J]. Physical Review Letters, 2015, 114(11):118002.

Soliton-cnoidal wave solution and its quasi-soliton behavior to the Korteweg-de Vries equation

WANG Jianyong

(College of Teacher Education, Quzhou University, Quzhou 324000, China)

Abstract: In this paper, a soliton-cnoidal wave solution with its quasi-soliton behavior to the Korteweg-de Vries equation is obtained using the generalized tanh expansion method. Firstly, the extended tanh function expansion method is used to construct the soliton-elliptic periodic wave solution of the KdV equation and its quasi-solitary limit. The phase shift formula of the periodic wave is given by the “clothing” structure of the soliton-elliptic periodic wave solution. In addition, combined with domestic and foreign research frontiers, the physical application of the solution is discussed.

Key words: Korteweg-de Vries equation; soliton-cnoidal wave solution; quasi-soliton behavior; generalized tanh expansion method

(责任编辑 章踐立)