

非线性系统的非局域对称及其应用

程雪苹^{1,2}

(1.浙江海洋大学 数理与信息学院, 浙江 舟山 316022;

2.浙江省海洋大数据挖掘与应用重点实验室, 浙江 舟山 316022)

摘要: 非局域对称作为对称理论重要组成部分, 近年来逐渐引起人们关注. 本文以势 Korteweg-de Vries (KdV)方程、修正 Korteweg-de Vries (mKdV)方程和 Kadomtsev-Petviashvili (KP)方程为例, 分别介绍了对应非线性系统与 Bäcklund 变换相关的非局域对称、非局域留数对称与 Darboux 变换相关的非局域对称. 通过引入 3 个辅助变量, 将 KP 方程与 Darboux 变换相关的非局域对称局域化为 Lie 点对称. 运用对称约化方法简单概述了 KP 方程的相似约化解, 其中包括孤立子和 Boussinesq 波相互作用解、孤立子和 KdV 型波相互作用解以及非均匀背景下的单孤立波解.

关键词: 非局域对称; 与 Bäcklund 变换相关的非局域对称; 非局域留数对称; 与 Darboux 变换相关的非局域对称; 局域化; 对称约化; 相互作用解

中图分类号: O411.1

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2020) 05-0068-09

众多求解方法中, 对称理论无疑是最重要也是最有效的研究非线性系统的方法之一, 运用对称性分析可使很多问题豁然开朗, 甚至彻底解决. 现今常用的对称理论最早由挪威数学家 Sophus Lie 建立, 它可以用来成功地解决或简化非线性问题.

1874 年, Sophus Lie 在 Galois 和 Abel 工作的启发下, 发现一些微分方程的解在某些连续变换群作用下保持不变, 从而引入连续群(或称 Lie 群)的概念, 使原来比较难以处理的微分方程的求解方法得到了统一和扩充^[1-2]. 1969 年, Bluman 和 Cole 将 Lie 群方法进行推广, 提出了非经典 Lie 群方法(即条件对称或第一型的对称)^[3], 这种对称要求在微分方程和其不变曲面条件的公共解集上群作用不变, 因而可以获得更多对称, 从而得到一些用经典 Lie 对称方法得不到的结果. 1989 年, Clarkson 和 Kruskal 提出了约化微分方程的直接法, 简称 CK 直接法^[4], 该方法最大的优势在于它直接从最一般相似约化出发, 不使用群论思想, 简单直接. 1990 年, 楼森岳教授完善了 CK 直接法^[5], 并应用到(2+1)维 KP 方程, 得到了新的相似解^[6]. 1992 年, Nucci 和

Clarkson 给出了一个反例, 用以说明直接法并非一般的方法, 对 Fizeh-Naghani 方程而言, 不能用直接法获得非经典 Lie 群法的相似解^[7]. 2000 年, 楼森岳教授和唐晓艳博士提出了条件约化概念^[8], 他们通过直接约化法的思想得到(2+1)维 KdV 方程的新条件相似约化, 这些结果在非经典理论中是不能得到的. 2005 年, 楼森岳教授又提出了修正的直接方法^[9], 该方法先求对称群, 经过对称群的作用构建已知解与未知解之间的关系, 修正的直接方法同时适用于可积系统和不可积系统. 后来在利用对称约化微分方程的过程中, 人们还引入了高阶对称, 或称广义条件对称^[10]. 此类对称可以构造比经典和非经典 Lie 点对称更丰富的精确解.

除了局域对称, 为了得到非线性系统更多的对称和精确解, 科学家还将局域对称推广到非局域对称. 1980 年, Vinogradov 和 Krasil'shchik 首次提出非局域对称, 他们利用递推算子构造了 Burgers 方程、KdV 方程等多个方程的非局域对称^[11], 并且第一次给出了它们的应用. 1982 年, Kaptsov 在求解发展方程 $u_t = F$ 的递推算子方程 $R_t = [F, R]$ (其中

F_* 是 F 的形式线性化)时, 发现其解 R 可以导出方程 $u_t = F$ 的一系列非局域对称^[12]. 1988 年, Bluman 等^[13]利用守恒律构造微分方程的势系统, 并通过研究系统的 Lie 点对称构造了原方程的非局域对称, 也进一步扩展了对称的范围. 之后, Krasil'shchik 和 Vinogradov 利用覆盖理论研究了伪势型的非局域对称^[14]. 基于这种伪势型的非局域对称, Galas、Schiff 和 Leo 等人得到了一些经典方程的非局域对称及其流, 并从 KdV 方程、Harry-Dym(HD)方程和 Ablowitz-Kaup-Newell-Segur(AKNS)方程的平凡解出发构造了一些新的精确解^[15-17]. 1991 年, Adler 通过散射和反散射方法引进了相关可积方程非局域对称的 Lie 代数, 从而对 Adler、Reiman 等人提出的可积梯队的经典结构进行了一般化^[18-19].

对称性研究的主流方法是从代数到群, 非局域对称早期的研究成果更多来自于递推算子的逆算子和共形不变形式^[20-23]. 最近楼森岳教授发现, 实际上面对许多复杂的非线性问题, 可从群到代数进行研究, 能得到许多意想不到的成果^[24-25]. 近年来, 楼森岳教授课题组通过 Darboux 变换、Painlevé 截断展开和 Bäcklund 变换、Lax 对建立了大量非线性系统的非局域对称^[26-28]. 陈勇教授课题组还发现, 通过非线性方程的高阶对称也可以构造非局域对称, 并提出了机械化方法^[29-30].

非局域对称可看作是局域对称的推广, 它是对称的重要组成部分, 无论是其获得还是应用, 都比局域对称要更加复杂和困难. 一旦给定系统的非局域对称, 我们可以从两个方面讨论其应用问题: 严格求解和寻求新的可积系统(包括负可积梯队). 不同于局域对称, 非局域对称因为含有积分项, 对应的初值问题不能直接求解, 与初值相对应的初值问题是一个不封闭、不适定的问题, 有限对称变换和相似约化不能够直接应用到非局域对称, 从而使得非局域对称的应用难度提高. 为解决这个问题, 楼森岳教授发展了非局域对称局域化方法, 在此基础上可完成相应的有限变换和对称约化研究. 已有的研究发现, 考虑非局域对称的对称约化能构造非线性系统的一类新的严格解, 即孤立子和非线性波相互作用解^[31-32].

本文我们先以几个经典的非线性偏微分方程为例, 介绍三类非局域对称, 其中包括势 KdV 方

程的与 Bäcklund 变换相关的非局域对称、mKdV 方程的非局域留数对称以及 KP 方程与 Darboux 变换相关的非局域对称. 并且文中我们将以 KP 方程与 Darboux 变换相关的非局域对称为例, 通过将非局域对称局域化为延拓 KP 系统的 Lie 点对称, 随后运用对称约化方法构造该方程的孤立子-非线性波相互作用解, 包括孤立子-Boussinesq 波相互作用解、孤立子-KdV 型波相互作用解和非均匀背景下单孤立波解等. 文章最后是非局域对称研究的总结和最新进展概述.

1 非局域对称

1.1 势 KdV 方程的与 Bäcklund 变换相关的非局域对称

本节以势 KdV 方程为例, 介绍从 Bäcklund 变换出发构造相应的非局域对称^[27].

考虑 KdV 方程:

$$\omega_t - 6\omega\omega_x + \omega_{xxx} = 0, \quad (1)$$

通过变换 $\omega = u_x$ 引入势 u , 其中, u 满足势 KdV 方程:

$$u_t - 3u_x^2 + u_{xxx} = 0. \quad (2)$$

对于势 KdV 方程(2), 存在以下 Bäcklund 变换:

$$u_x + u_{1,x} = -2\lambda + (u - u_1)^2 / 2, \quad (3)$$

$$u_t + u_{1,t} = 2u_x^2 + 2u_{1,x}^2 + 2u_x u_{1,x} - (u - u_1)(u_{xx} - u_{1,xx}), \quad (4)$$

其中, λ 为任意常数. 式(3)和(4)表明, 如果 u 是势 KdV 方程(2)的解, 那么 u_1 也是该方程的解, 它们代表了式(2)的 2 个解之间的有限变换. 另外, 式(3)和(4)也可以看作是式(2)的一个非线性 Lax 对, 因为

$$u_{1,x} = -u_x - 2\lambda + (u - u_1)^2 / 2, \quad (5)$$

$$u_{1,t} = -u_t + 2u_x^2 + 2u_{1,x}^2 + 2u_x u_{1,x} - (u - u_1)(u_{xx} - u_{1,xx}), \quad (6)$$

的相容性条件 $u_{1,xt} = u_{1,t,x}$ 正是式(2).

考虑式(2)和其 Bäcklund 变换式(3)和(4)在下列无穷小变换下保持不变:

$$\lambda \rightarrow \lambda + \varepsilon\mu, \quad u \rightarrow u + \varepsilon\sigma, \quad u_1 \rightarrow u_1 + \varepsilon\sigma',$$

其中, ε 是无穷小参数, 即要求 u 和 u_1 的对称 σ 和 σ' 满足对称方程:

$$\sigma_t - 6u_x\sigma_x + \sigma_{xxx} = 0, \quad (7)$$

$$\sigma'_x + \sigma_x + 2\mu - (\sigma - \sigma')(u - u_1) = 0, \quad (8)$$

$$\sigma'_t + \sigma_t - (4u_x + 2u_{1,x})\sigma_x - (2u_x + 4u_{1,x})\sigma'_x +$$

$$\begin{aligned} &(\sigma - \sigma')(u_{xx} - u_{1,xx}) + (u - u_1) \cdot \\ &(\sigma_{xx} - \sigma'_{xx}) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

方程组(7)~(9)的解包含了大量势 KdV 方程的非局域对称, 特别地, 当 $\mu = 0$, 存在如下命题.

命题 1 势 KdV 方程(2)具有新的非局域对称

$$\sigma = e^{\int (u - u_1) dx}, \quad (10)$$

其中, u 和 u_1 满足 Bäcklund 变换式(3)和(4).

1.2 KdV 方程的非局域留数对称

最近楼森岳教授在研究玻色化的超对称 KdV 方程时, 发现它的截断 Painlevé 展开的留数是非局域的, 可称之为非局域留数对称^[28]. 对于任一个 Painlevé 可积的系统, 截断 Painlevé 展开的留数都是原系统的非局域对称. 而且很多不同的可积系统拥有完全相同的留数对称. 本节我们以 mKdV 方程为例, 介绍该方程的非局域留数对称.

考虑如下形式的 mKdV 方程:

$$u_t - 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0, \quad (11)$$

根据 WTC(Weiss、Tabor、Carnevale)方法^[33]并结合领头项分析, 将 mKdV 方程的 Painlevé 截断展开式写为:

$$u = \frac{u_0}{\phi} + u_1. \quad (12)$$

其中, $\phi \equiv \phi(x, t)$ 是一个任意奇异流形. 将展开式(12)代入 mKdV 方程(11), 并消去 ϕ 的不同次幂, 得到如下 5 个方程:

$$u_{1t} - 6u_1^2 u_{1x} + u_{1,xxx} = 0, \quad (13)$$

$$u_{0t} - 26u_0 u_1 u_{1x} - 6u_1^2 u_{0x} + u_{0,xxx} = 0, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} &-6u_0^2 u_{1x} - u_0 \phi_{xxx} - 3u_{0xx} \phi_x - u_0 \phi_t - 12u_{0x} u_0 u_1 - \\ &3u_{0x} \phi_{xx} + 6\phi_x u_0 u_1^2 = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$2u_0^2 u_1 \phi_x - u_0^2 u_{0x} + u_{0x} \phi_x^2 + u_{0x} \phi_x \phi_{xx} = 0, \quad (16)$$

$$-6u_0 \phi_x (\phi_x^2 - u_0^2) = 0. \quad (17)$$

从以上最后一个式(17)不难得到:

$$u_0 = \delta \phi_x, \quad (18)$$

其中, $\delta = \pm 1$. 比较式(13)和(11)不难发现, u_1 正是满足 mKdV 方程的解, 所以才能有 mKdV 方程的 Bäcklund 变换:

$$u = \frac{\delta}{\phi} \phi_x + u_1, \quad (19)$$

也就是说, 如果 u_1 是 mKdV 方程(11)的解, 那么满足式(19)的 u 也是该方程的解. 从式(14)不难验证, u_0 正是 mKdV 方程(13)的线性化方程(或对称方程)的解, 于是有 u_1 的对称:

$$\sigma^{u_1} = u_0 = \delta \phi_x. \quad (20)$$

从式(16)并考虑式(20), 可得到 u_1 和流函数 ϕ 满足关系式:

$$\phi_{xx} = 2\delta u_1 \phi_x. \quad (21)$$

由于对称式(20)包含流函数的一次导数, 而 u_1 和流函数 ϕ 又有式(21)的关系, 故式(20)是 u_1 的一个非局域对称, 亦即非局域留数对称.

1.3 KP 方程的与 Darboux 变换相关的非局域对称

Darboux 变换作为可积系统另一重要的有限变换, 势必与对称有着重要的联系. 本节我们以 KP 方程为例, 从 Darboux 变换出发给出与之对应的非局域对称.

考虑如下形式的 KP 方程:

$$(u_t - 6uu_x + u_{xxx})_x + 3u_{yy} = 0. \quad (22)$$

式(22)有 Lax 对:

$$\phi_y + \phi_{xx} - u\phi = \lambda\phi, \quad (23)$$

$$\phi_t + 4\phi_{xxx} - 6u\phi_x - 3(u_x - \partial_x^{-1} u_y)\phi = 0. \quad (24)$$

从文献[24]可知, 我们能得到如下结果.

命题 2 如果 u 是 KP 方程(22)的解, 则

$$\bar{u} = u - 2(\ln \phi)_{xx}, \quad (25)$$

也是式(22)的解, 其中, ϕ 满足式(23)和(24).

利用上述 Darboux 变换(命题 2), 不难得到:

命题 3 $\Sigma = (\tilde{\psi} / \psi)_{xx}$ 是 KP 方程(22)的对称, 其中, $\tilde{\psi}(x, y, t)$ 和 $\psi(x, y, t)$ 满足以下方程:

$$\psi_y + \psi_{xx} - (u + 2(\ln \psi)_{xx})\psi = 0, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} &\psi_t + 4\psi_{xxx} - 3(u_x + 2(\ln \psi)_{xxx})\psi - 6(u + 2(\ln \psi)_{xx}) \cdot \\ &\psi_x + 3(\partial_x^{-1} u_y + 2(\ln \psi)_{xy})\psi = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\tilde{\psi}_y + \tilde{\psi}_{xx} - (u + 2(\ln \psi)_{xx})\tilde{\psi} = \psi, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} &\tilde{\psi}_t + 4\tilde{\psi}_{xxx} - 3(u_x + 2(\ln \psi)_{xxx})\tilde{\psi} - \\ &6(u + 2(\ln \psi)_{xx})\tilde{\psi}_x + 3(\partial_x^{-1} u_y + \\ &2(\ln \psi)_{xy})\tilde{\psi} = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

通过直接计算可知, 如果 ψ 满足式(26)和(27), 并且 ψ^* 满足:

$$-\psi_y^* + \psi_{xx}^* - (u + 2(\ln \psi^*)_{xx})\psi^* = 0, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} &\psi_t^* + 4\psi_{xxx}^* - 3(u_x + 2(\ln \psi^*)_{xxx})\psi^* - \\ &6(u + 2(\ln \psi^*)_{xx})\psi_x^* - 3(\partial_x^{-1} u_y + \\ &2(\ln \psi^*)_{xy})\psi^* = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

那么,

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} = &\psi \int_{x_0}^x \frac{1}{\psi \psi^*} dx \pm y \psi \mp \psi \int_{y_0}^y f(y, t) dy + \\ &\psi \int_t^t g(t) dt, \end{aligned} \quad (32)$$

为式(28)和(29)的解, 其中,

$$f(y, t) = \left[\frac{1}{\psi} \left(\frac{1}{\psi^*} \right)_x - \frac{1}{\psi^*} \left(\frac{1}{\psi} \right)_x \right]_{x=x_0}, \quad (33)$$

$$g(t) = \left[\frac{6u}{\psi\psi^*} + \frac{4(\psi_{xx}\psi^* + \psi_x\psi_x^* + \psi\psi_{xx}^*)}{\psi^2\psi^{*2}} - \frac{8\psi_x^2}{\psi^3\psi^*} - \frac{8\psi_x^{*2}}{\psi\psi^{*3}} \right]_{x=x_0, y=y_0}. \quad (34)$$

再则, 我们容易验证, 如果 ψ 是式(26)和(27)的解, 且 ψ^* 是式(30)和(31)的解, 那么 $\phi = 1/\psi^*$ 满足式(23)和(24), 其中要求 $\lambda = 0$, 且 $\phi^* = 1/\psi$ 满足:

$$-\phi_y^* + \phi_{xx}^* - u\phi^* = 0, \quad (35)$$

$$\phi_t^* + 4\phi_{xxx}^* - 3u_x\phi^* - 6u\phi_x^* - 3(\partial_x^{-1}u_y)\phi^* = 0. \quad (36)$$

总结来说, 我们得到:

命题 4 如果 ϕ 和 ϕ^* 满足式(23)、(24)、(35)和(36), 且要求 $\lambda = 0$, 那么 $\Sigma = (\phi\phi^*)_x$ 是 KP 方程(22)的非局域对称.

2 KP 方程的非局域对称局域化及对称约化

对称理论最重要的应用之一是可用来构造非线性系统的解析解. 对 Lie 点对称来说, 可以通过 Lie 第一基本定理计算出有限对称变换, 由旧解得到新解, 也可以通过降低常微分方程的次数和偏微分方程的维数直接构造群不变解. 但是对非局域对称来说, 有限对称变换和相似约化不能直接被计算. 我们需要将非局域对称局域化为 Lie 点对称, 不过不是所有的非局域对称都能够被局域化. 本节我们以 KP 方程与 Darboux 变换相关的非局域对称为例, 简单讨论它的局域化问题. 再进一步地运用对称约化方法给出方程的相似约化解.

如 1.3 节所述, KP 方程(22)有非局域对称:

$$\sigma^u = (\phi\psi)_x, \quad (37)$$

其中, ϕ 和 ψ 分别满足 Lax 对:

$$\psi_y + \psi_{xx} - u\psi = 0, \quad (38)$$

$$\psi_t + 4\psi_{xxx} - 6u\psi_x - 3(u_x + \partial_x^{-1}u_y)\psi = 0, \quad (39)$$

和共轭 Lax 对:

$$\phi_{xx} - u\phi - \phi_y = 0, \quad (40)$$

$$\phi_t + 4\phi_{xxx} - 6u\phi_x - 3(u_x + \partial_x^{-1}u_y)\phi = 0. \quad (41)$$

由于式(37)是 KP 方程的 Darboux 变换的无穷小形式, 可以将其局域化为 Lie 点对称, 并利用 Lie 第一定理得到初始的 Darboux 变换. 从式(37)可以看到, 非局域对称包含函数 ψ 和 ϕ 的空间导数, 所

以考虑引入场量:

$$\psi_1 \equiv \psi_x, \quad \phi_1 \equiv \phi_x, \quad p_x = \phi\psi, \quad (42)$$

将原来 $\{x, y, t, u\}$ 空间的与 Darboux 变换相关的非局域对称式(37)局域化成延拓空间 $\{x, y, t, u, \psi, \phi, \psi_1, \phi_1, p\}$ 的 Lie 点对称. 根据 Lie 点对称方法, 求得延拓 KP 方程系统(37)~(42)的 Lie 点对称为:

$$\begin{aligned} \sigma^u &= (xf_t/3 - y^2 f_{tt}/18 - yh_t/6 - g)u_x + \\ &\quad (2yf_t/3 + h)u_y + fu_t + 2f_t u/3 + xf_{tt}/18 - \\ &\quad y^2 f_{ttt}/108 - yh_{tt}/36 - g_t/6 + \\ &\quad c(\phi\psi_1 + \psi\phi_1), \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \sigma^\psi &= (xf_t/3 - y^2 f_{tt}/18 - yh_t/6 - g)\psi_x + \\ &\quad (2yf_t/3 + h)\psi_y + f\psi_t + (xyf_{tt}/18 + xh_t/12 - \\ &\quad y^3 f_{ttt}/324 - y^2 h_{tt}/72 - yg_t/6 - \\ &\quad F + cp/2)\psi, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \sigma^\phi &= (xf_t/3 - y^2 f_{tt}/18 - yh_t/6 - g)\phi_x + (2yf_t/3 + \\ &\quad h)\phi_y + f\phi_t - (xyf_{tt}/18 + xh_t/12 - \\ &\quad y^3 f_{ttt}/324 - y^2 h_{tt}/72 - yg_t/6 - F - \\ &\quad f_t/3 + c_2 - cp/2)\phi, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \sigma^{\psi_1} &= (xf_t/3 - y^2 f_{tt}/18 - yh_t/6 - g)\psi_{1x} + (2yf_t/ \\ &\quad 3 + h)\psi_{1y} + f\psi_{1t} + (yf_{tt}/18 + h_t/12)\psi + \\ &\quad (xyf_{tt}/18 + xh_t/12 - y^3 f_{ttt}/324 - y^2 h_{tt}/72 - \\ &\quad yg_t/6 + f_t/3 - F - cp/2)\psi_1 + c\phi\psi^2/2, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \sigma^{\phi_1} &= (xf_t/3 - y^2 f_{tt}/18 - yh_t/6 - g)\phi_{1x} + \\ &\quad (2yf_t/3 + h)\phi_{1y} + f\phi_{1t} - (yf_{tt}/18 + h_t/12)\phi - \\ &\quad (xyf_{tt}/18 + xh_t/12 - y^3 f_{ttt}/324 - y^2 h_{tt}/72 - \\ &\quad yg_t/6 - 2f_t/3 - F + c_2 - cp/2)\phi_1 + \\ &\quad c\phi^2/2, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \sigma^p &= (xf_t/3 - y^2 f_{tt}/18 - yh_t/6 - g)p_x + \\ &\quad (2yf_t/3 + h)p_y + fp_t - c_2 p - c_1 + cp^2/2, \end{aligned} \quad (48)$$

其中, f 、 g 、 h 、 F 为关于 t 的任意函数, c_1 、 c_2 、 c_3 为任意常数.

得了非线性系统的 Lie 点对称后, 可以运用对称约化方法得到对应系统的相似约化解. 由于对称约化方法是一种非常成熟的求解非线性偏微分方程的方法^[34], 此处不再详细赘述, 具体计算过程可参见文献[32]. 设方程组(43)~(48)中 σ^u 、 σ^ψ 、 σ^ϕ 、 σ^{ψ_1} 、 σ^{ϕ_1} 、 σ^p 均等于零, 便可得到延拓 KP 系统的相似约化解. 以下我们分 3 种情况罗列出 KP 方程与非局域对称相关的相似约化解.

2.1 第 1 种情形: $f \neq 0$

定理 1 (KP 方程约化定理 1) 如果 P 是约化

方程:

$$P_{\xi\xi\xi\xi} P_{\xi}^2 - 3P_{\xi\xi\xi} P_{\eta}^2 - 4\Delta^2 P_{\xi\xi} P_{\xi}^4 + 3P_{\eta\eta} P_{\xi}^2 - (1 + 4P_{\xi\xi\xi}) P_{\xi\xi} P_{\xi} + 3P_{\xi\xi}^2 = 0, \quad (49)$$

的解, 那么,

$$u = (4P_{\xi} P_{\xi\xi\xi} - 8\Delta^2 P_{\xi}^4 + 3P_{\eta}^2 + P_{\xi} - 3P_{\xi\xi}^2) / (f^{2/3} P_{\xi}^2) - x f_t / (18f) + y^2 (3ff_{tt} - 2f_t^2) / (324f^2) - 2\Delta / f^{2/3} (P_{\xi\xi} \tanh(\Delta(f_2 + P))) - \Delta P_{\xi}^2 \tanh^2(\Delta(f_2 + P))) + y(fy_{0t})_t / (36f^{1/3}) + y_{0t}^2 f^{4/3} / 72 - x_{0t} f^{1/3} / 6, \quad (50)$$

为 KP 方程的解, 其中, $\Delta = \sqrt{c_2^2 + 2cc_1} / 2$, $P = P(\xi, \eta)$, 且相似变量 ξ 和 η 满足:

$$\xi = x f^{-1/3} + y^2 f_t f^{-4/3} / 18 + y y_{0t} f^{1/3} / 6 - y_0^2 f_t / 18 - x_0, \eta = y f^{-2/3} - y_0.$$

从相似解(50)可知, 若将解中与 Darboux 变换相关的部分去掉, 即令 $\Delta = 0$, 约化方程(49)退化为著名的 Boussinesq 方程:

$$(U_{\xi\xi\xi} - 6UU_{\xi})_{\xi} + 3U_{\eta\eta} = 0, \quad (51)$$

其中,

$$U = (P_{\xi\xi}^2 - P_{\eta}^2) P_{\xi}^{-2} / 2 - 4\Delta^2 P_{\xi}^2 / 3 + (1 + 4P_{\xi\xi\xi}) P_{\xi}^{-1} / 6.$$

由于解式(50)中 $\tanh$ 函数的出现, 就相当于在 Boussinesq 波基础上引入了一个附加的孤立子, 所以群不变解式(50)是一个孤立子和一般 Boussinesq 波的相互作用解.

2.2 第 2 种情形: $f = 0, h \neq 0$

定理 2 (KP 方程约化定理 2) 如果 p' 是约化方程:

$$2(p'_{\xi\xi\xi} + p'_{\xi}) p_{\xi}^{\prime 2} - 2p'_{\xi} p'_{\xi} p'_{\xi\xi} - 8\gamma^2 p'_{\xi\xi} p_{\xi}^{\prime 4} - (\ln h)_t p_{\xi}^{\prime 3} + 2((\ln h)_t p' - 4p'_{\xi\xi\xi} - 6g/h) p'_{\xi\xi} p_{\xi}^{\prime} + 6p_{\xi\xi}^{\prime 3} - 6p_{\xi\xi}^{\prime} = 0 \quad (52)$$

的解, 那么,

$$u = p' / (6p_{\xi}^{\prime}) - 4\gamma^2 p_{\xi}^{\prime 2} / 4 - g_t p' / (6h) + h_t p^{\prime 2} / (72h) + g^2 / (2h^2) - (h p' - 4h p'_{\xi\xi\xi} - g) / (6h p_{\xi}^{\prime}) + (1 - p_{\xi\xi}^{\prime 2}) / (2p_{\xi}^{\prime 2}) - (y + p') \cdot (p' h_t - 12g_t - y h_t) / (72h) - 2\gamma p'_{\xi\xi} \tanh(\gamma \cdot (y + p')) + 2\gamma^2 p_{\xi}^{\prime 2} \tanh^2(\gamma(y + p')), \quad (53)$$

为 KP 方程的解, 其中, 变量 $\xi = x + h_t y^2 / (12h) + gy / h$.

若剔除解(53)中与 Darboux 变换相关部分, 即

令 $c = 0$, 则约化方程退化为已知的 KdV 型约化:

$$(U_{1\xi\xi\xi} - 6U_1 U_{1\xi})_{\xi} + U_{1\xi t} + h_t U_{1\xi} / (2h) + h_{tt} / (12h) = 0, \quad (54)$$

其中, $U_1 \equiv u - h_t p^{\prime 2} / (72h) + g_t p' / (6h) - g^2 / (2h^2)$. 式(54)中 $\tanh$ 部分的出现意味着此时群的不变解(53)是一个孤立子和一般 KdV 型波的相互作用解.

2.3 第 3 种情形: $f = h = 0$

定理 3 (KP 方程约化定理 3) 如果 q 是约化方程:

$$q_{yy} = g_t / (3g) \quad (55)$$

的解, 那么,

$$u = q_t / 6 + q^2 / 2 - 4\beta^2 / 3 - g_t (x + q) / (6g) + 2\beta^2 \tanh^2(\beta(x + q)), \quad (56)$$

为 KP 方程的解, 其中, $\beta = \sqrt{c_2^2 + 2cc_1} / (2g)$. 清楚地, 约化解(56)对应于一个单孤立子解(当 g 为常数, 且 q 为 y 和 t 的线性函数时)或一个非均匀背景下的单孤立波(当 g 为非常数时).

从以上 KP 方程约化定理 1、2、3 可知, 我们能得到如下几个重要信息:

(1)与 Darboux 变换相关的非局域对称可用于寻求新的对称约化, 它们是不包含 Darboux 变换情况的推广, 并且当去掉 Darboux 变换部分时, 约化方程可退化回一般的约化情况.

(2)不管种子解是什么, Darboux 变换的本质就是增加一个孤立子.

(3)孤立子和其他非线性波的相互作用可以由解析方法求得. 定理 1 和定理 2 分别展示了孤立子和 Boussinesq 波以及孤立子和 KdV 型波的相互作用, 而第三种约化则给出了均匀或非均匀背景下的孤立子.

3 总结与进展

相比局域对称, 非局域对称的获取和应用更加困难和复杂, 但它往往也能带来一些新的结果. 本文以势 KdV 方程、mKdV 方程和 KP 方程为例, 分别介绍了从 Bäcklund 变换、Painlevé 截断展开和 Darboux 变换入手构造非局域对称的过程. 然而即便已知非线性系统的非局域对称, 但碍于与之相联系的初值问题并不能直接求解, 所以非局域对称不能像局域对称那样直接用于对原方程进行约化求解. 于是文中以 KP 方程的与 Darboux 变换相

关的非局域对称为例, 通过引入辅助场量 ϕ_i 、 ψ_i 和 p , 将原空间的非局域对称转化成拓展空间的 Lie 点对称, 从而通过对称约化方法, 构造了 KP 方程的孤立子-非线性波相互作用解, 包括孤立子-Boussinesq 波相互作用解、孤立子-KdV 型波相互作用解和非均匀背景下的单孤立波解等。

事实上, 自从楼森岳教授发展了非局域对称的局域化方法以来, 人们已经通过各种方式构造了大量非线性系统的非局域对称, 包括从非线性系统的 Darboux 变换^[32,35-37]、Bäcklund 变换^[38-42]、Painlevé 截断展开^[43-49]、Lax 对^[50-53]等。人们所研究的非线性系统也从经典可积系统推广到超对称系统^[54-56]、高维系统^[57-58]、Alice-Bob^[59-60]系统、变系数方程^[61-63]等等。通过引入适当的辅助变量, 非局域对称被局域化为 Lie 对称, 随后通过求解初值问题, 可以得到延拓系统的新的有限对称变换。随着研究的深入, 通过将 N 重非局域留数对称局域化, 有限变换的形式也从简单的二元 Darboux 变换推广到 N 次二元 Darboux 变换。而且从有限变换分析, 通过不同方式得到的非局域对称是相互联系的, 甚至是等价的。例如, KP 方程与 Darboux 变换相关的非局域对称(37)对应的有限变换就不再是通常的 Darboux 变换(第一类 Darboux 变换), 它等价于所谓的 Levi 变换(即第二类 Darboux 变换)^[32]。也就是说, 在代数意义下, 2 种不同类型的 Darboux 变换有着同样的形式, 只是它们的群参数不同而已。第一类 Darboux 变换的群参数是谱参数, 而第二类 Darboux 变换的群参数与谱参数不相关。事实上, 第二类 Darboux 变换不是别的, 正是原来非线性系统的 Schwarzian 形式的 Möbius 变换。通过非线性系统的非局域对称, 还可以构造对应系统的负可积梯队^[64]、非局域守恒律^[39-40]等。当非局域对称被局域化为 Lie 点对称, 人们就可以应用对称约化方法构造对应非线性系统的丰富的孤立子-非线性波相互作用解, 例如已经得到的 KdV 方程的孤立子-Painlevé 型波相互作用解、孤立子-椭圆周期波相互作用解、孤立子-有理数解相互作用解^[26]、AKNS 系统的孤立子-PainlevéIV 型波相互作用解、孤立子-椭圆周期波相互作用解^[30]、Konopelchenko-Dubrovsky(KD)方程的扭结-椭圆周期波相互作用解等等^[65]。从得到的相互作用解的解析表达式(如

式(50)和式(53)), 我们不难发现孤立子和非线性波相互作用解总是可以表示成 $\tanh$ 函数形式。于是, 楼森岳教授在此基础上又创造性地提出了相容 Riccati 方法/相容 $\tanh$ 函数展开方法^[66-69]。相较经典的 $\tanh$ 函数展开方法, 除了能得到纯粹的孤立子解外, 相容 Riccati 方法/相容 $\tanh$ 函数展开方法允许我们构造更复杂的孤立子和非线性波相互作用解。此类相互作用解的出现无疑为非线性系统提供了一种新的激发模式, 也为更好地解释诸如海洋中大波浪(孤立子)伴随着小波(背景波)、等离子体系统中穿周期波的孤立子^[70]等非线性现象提供了可能。

据我们了解, 目前国内从事非局域对称研究的除了宁波大学的楼森岳教授、李彪教授、贾曼博士、熊娜博士等人, 还有华东师范大学的陈勇教授团队、唐晓艳教授、李玉奇博士, 浙江师范大学林机教授团队; 绍兴文理学院任博博士和刘希忠博士, 电子科技大学刘萍博士, 上海理工大学胡恒春博士, 衢州学院王建勇博士, 浙江工业大学胡晓瑞博士、郝夏芝博士, 丽水学院马正义教授、费正喜教授、陈俊超博士, 中国矿业大学田守富研究员团队, 聊城大学辛祥鹏博士, 上海海事大学王云虎博士、王惠博士等等, 他们的具体研究工作可参见文后的参考文献。

参考文献:

- [1] Lie S. Sophus Lie's 1880 Transformation Group Paper [M]. Ackerman M, Translation. Brookline: Mathematical Science Press, 1975.
- [2] Lie S. Sophus Lie's 1884 Differential Invariant Paper[M]. Ackerman M, Translation. Brookline: Mathematical Science Press, 1976.
- [3] Bluman G W, Cole J D. The general similarity solution of the heat equation[J]. Journal of Mathematical Fluid Mechanics, 1969, 69(18):1025-1042.
- [4] Clarkson P A, Kruskal M D. New similarity solutions of Boussinesq equation[J]. Journal of Mathematical Physics, 1989, 30(10):2201-2213.
- [5] Lou S Y. A note on the new similarity reductions of the Boussinesq equation[J]. Physics Letters A, 1990, 151(3/4): 133-135.
- [6] Lou S Y, Ruan H Y, Chen D F, et al. Similarity reductions of the KP equation by a direct method[J]. Journal of

- Physics A: General Physics, 1999, 24(7):1455-1467.
- [7] Nucci M C, Clarkson P A. The nonclassical method is more general than the direct method for symmetry reductions: An example of the Fitzhugh-Nagumo equation[J]. Physics Letters A, 1992, 164(1):49-56.
- [8] Tang X Y, Lou S Y, Lin J. Similarity and conditional similarity reductions of a (2+1)-dimensional KdV equation via a direct method[J]. Journal of Mathematical Physics, 2000, 41(12):8286-8303.
- [9] Lou S Y, Ma H C. Non-Lie symmetry groups of (2+1) dimensional nonlinear systems obtained from a simple direct method[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2005, 38(7):L129-L137.
- [10] Fushchych W I, Zhdanov R Z. Conditional symmetries and anti-reduction of nonlinear heat equations[J]. Proc Acad Sci: Ukraine, 1994, 5:251-259.
- [11] Vinogradov A M, Krasil'shchik I S. A method of calculating higher symmetries of nonlinear evolutionary equations and nonlocal symmetries[J]. Dokl Akad Nauk: SSSR, 1980, 253:1289-1296.
- [12] Kaptsov O V. An extension of the symmetry of evolution equations[J]. Dokl Akad Nauk: SSSR, 1982, 262:1056-1059.
- [13] Bluman G W, Reid G J, Kumei S. New classes of symmetries for partial differential equations[J]. Journal of Mathematical Physics, 1988, 29(4):806-811.
- [14] Krasil'shchik I S, Vinogradov A M. Nonlocal symmetries and the theory of coverings: An addendum to A.M. Vinogradov's 'local symmetries and conservation law'[J]. Acta Applicandae Mathematicae, 1984, 2(1):79-96.
- [15] Galas F. New non-local symmetries with pseudo-potentials[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1992, 25(15):L981-L986.
- [16] Schiff J. Symmetries of KdV and loop groups[EB/OL]. [2020-01-12]. <https://www.researchgate.net/publication/2468395>.
- [17] Leo M, Leo R A, Soliani G, et al. On the relation between Lie symmetries and prolongation structures of nonlinear field equations-nonlocal symmetries[J]. Progress of Theoretical Physics, 2001, 105(1):77-97.
- [18] Adler M. On a trace function for format pseudo differential operators and the symplectic structure of the Korteweg-de Vries type equations[J]. Inventiones Mathematicae, 1978, 50(3):219-248.
- [19] Reĭman A G, Semenov-Tjan-Šanskiĭ M A. Algebras of flows and nonlinear partial differential equations[J]. Dokl Akad Nauk: SSSR, 1980, 251:1310-1314.
- [20] Lou S Y. Symmetries of the KdV equation and four hierarchies of the integrodifferential KdV equations[J]. Journal of Mathematical Physics, 1994, 35(5):2390-2396.
- [21] Ruan H Y, Lou S Y, Lou S Y. New symmetries of the Jaulent-Miodek hierarchy[J]. Journal of the Physical Society of Japan, 1993, 62(6):1917-1921.
- [22] Lou S Y. Integrable models constructed from the symmetries of the modified KdV equation[J]. Physics Letters B, 1993, 302(2/3):261-264.
- [23] Lou S Y. Conformal invariance and integrable models[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1997, 30(13):4803-4813.
- [24] Lou S Y, Hu X B. Non-local symmetries via Darboux transformation[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1997, 30(5):L95-L100.
- [25] Lou S Y, Hu X B. Infinitely many Lax pairs and symmetry constraints of the KP equation[J]. Journal of Mathematical Physics, 1997, 38(12):6401-6427.
- [26] Hu X R, Lou S Y, Chen Y. Explicit solutions from eigenfunction symmetry of the Korteweg-de Vries equation[J]. Physical Review E, 2012, 85(5): 56607.
- [27] Lou S Y, Hu X R, Chen Y. Nonlocal symmetries related to Bäcklund transformation and their applications [J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2012, 45(15):155209.
- [28] Gao X N, Lou S Y, Tang X Y. Bosonization, singularity analysis, nonlocal symmetry reductions and exact solutions of supersymmetric KdV equation[J]. Journal of High Energy Physics, 2013, 2013(5):1-29.
- [29] Xin X P, Chen Y. A method to construct the nonlocal symmetries of nonlinear evolution equations[J]. Chinese Physics Letters, 2013, 30(10):100202.
- [30] Xin X P, Miao Q, Chen Y. Nonlocal symmetry, optimal system and explicit solutions of the mKdV equation[J]. Chinese Physics B, 2014, 23(1):010203.
- [31] Cheng X P, Lou S Y, Chen C L, et al. Interactions between solitons and other nonlinear Schrödinger waves [J]. Physical Review E, 2014, 89(4):043202.
- [32] Cheng X P, Chen C L, Lou S Y. Interactions among different types of nonlinear waves described by the Kadomtsev-Petviashvili equation[J]. Wave Motion, 2014, 51(8):1298-1308.
- [33] Weiss J, Tabor M, Carnevale G. The Painlevé property for partial differential equations[J]. Journal of Mathematical Physics, 1983, 24(3):522-526.
- [34] Lou S Y, Tang X Y. The methods of nonlinear mathematics and physics[M]. Beijing: Science Press, 2006.

- [35] Cheng X P, Yang Y Q, Ren B, et al. Interaction behavior between solitons and (2+1)-dimensional CDGKS waves[J]. *Wave Motion*, 2019, 86:150-161.
- [36] Chen J C, Xin X P, Chen Y. Nonlocal symmetries of the Hirota-Satsuma coupled Korteweg-de Vries system and their applications: Exact interaction solutions and integrable hierarchy[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2014, 55(5):053508.
- [37] Li Y Q, Chen J C, Chen Y, et al. Darboux transformations via Lie point symmetries: KdV equation[J]. *Chinese Physics Letters*, 2014, 31(1):010201.
- [38] Zhou H J, Li C Z, Li X Y, et al. Nonlocal symmetries of Frobenius sinh-Gordon systems[J]. *Advances in Difference Equations*, 2018, 2018:271.
- [39] Lin J, Jin X W, Gao X L, et al. Solitons on a periodic wave background of the modified KdV-Sine-Gordon equation[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2018, 70(2):119-126.
- [40] Tang X Y, Liang Z F, Wang J Y. Nonlocal topological solitons of the sine-Gordon equation[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2015, 48(28):285204.
- [41] Wang J Y, Tang X Y, Liang Z F, et al. Infinitely nonlocal symmetries and conservation laws for the (1+1)-dimensional sine-Gordon equation[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2015, 421(1):685-696.
- [42] Tang X Y, Liang Z F. Nonlocal symmetries and conservation laws of the Sinh-Gordon equation[J]. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 2017, 24(1):93-106.
- [43] Liu X Z, Yu J, Ren B, et al. Residual symmetry reductions and interaction solutions of the (2+1)-dimensional Burgers equation[J]. *Chinese Physics B*, 2015, 24(1):010203.
- [44] Liu X Z, Yu J, Ren B, et al. Bäcklund transformations for the Burgers equation via localization of residual symmetries[J]. *Chinese Physics B*, 2014, 23(11):110203.
- [45] Ren B, Cheng X P, Lin J. The (2+1)-dimensional Konopelchenko-Dubrovsy equation: Nonlocal symmetries and interaction solutions[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 86(3):1855-1862.
- [46] Ren B. Symmetry reduction related with nonlocal symmetry for Gardner equation[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2017, 42:456-463.
- [47] Liu P, Zeng B Q, Yang J R, et al. Exact solutions and residual symmetries of the Ablowitz-Kaup-Newell-Segur system[J]. *Chinese Physics B*, 2015, 24(1):10202.
- [48] Cheng W G, Li B, Chen Y. Nonlocal symmetry and exact solutions of the (2+1)-dimensional breaking soliton equation[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2015, 29(1/2/3):198-207.
- [49] Liu Y K, Li B. Nonlocal symmetry and exact solutions of the (2+1)-dimensional Gardner equation[J]. *Chinese Journal of Physics*, 2016, 54(5):718-723.
- [50] Fei J X, Cao W P, Ma Z Y. Nonlocal symmetries and explicit solutions for the Gardner equation[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2017, 314:293-298.
- [51] Chen J C, Ma Z Y, Hu Y H. Nonlocal symmetry, Darboux transformation and soliton-cnoidal wave interaction solution for the shallow water wave equation[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2018, 460(2):987-1003.
- [52] Huang L L, Chen Y. Nonlocal symmetry and similarity reductions for a (2+1)-dimensional Korteweg-de Vries equation[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2018, 92(2):221-234.
- [53] Huang L L, Chen Y. Nonlocal symmetry and similarity reductions for the Drinfeld-Sokolov-Satsuma-Hirota system[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2017, 64:177-184.
- [54] Ren B, Lin J, Lou Z M. Invariant interaction solutions for a supersymmetric mKdV equation[J]. *Chinese Journal of Physics*, 2018, 56(5):2317-2331.
- [55] Ren B, Lou S Y. A super mKdV equation: Bosonization, Painlevé property and exact solutions[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2018, 69(4):343.
- [56] Ren B, Lin J, Le J Y, et al. Nonlocal symmetry reductions for bosonized supersymmetric Burgers equation[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2017, 68(2):170-176.
- [57] Liu X Z, Yu J, Lou Z M, et al. Residual symmetry analysis and CRE integrability of the (3+1)-dimensional Burgers system[J]. *The European Physical Journal Plus*, 2018, 133(12):503-508.
- [58] Liu X Z, Yu J, Lou Z M. Residual symmetry, CRE integrability and interaction solutions of the (3+1)-dimensional breaking soliton equation[J]. *Physica Scripta*, 2018, 93(8):85201.
- [59] Ma Z Y, Fei J X, Chen J C. Nonlocal symmetry and explicit solution of the Alice-Bob modified Korteweg-de Vries equation[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2018, 70(1):031.
- [60] Jia M, Lou S Y. Exact PSTd invariant and PSTd symmetric breaking solutions, symmetry reduction and Bäcklund transformation for an AB-KdV system[J].

- Physics Letters A, 2018, 382(17):1157-1166.
- [61] Chen J C, Wu H L, Zhu Q Y. Bäcklund transformation and soliton-cnoidal wave interaction solution for the coupled Klein-Gordon equation[J]. Nonlinear Dynamics, 2018, 91(3):1949-1961.
- [62] Xin X P, Zhang L L, Xia Y R, et al. Nonlocal symmetries and exact solutions for the (2+1)-dimensional generalized variable coefficient shallow water wave equation[J]. Applied Mathematics Letters, 2019, 94:112-119.
- [63] Xin X P, Liu H Z, Zhang L L, et al. High order nonlocal symmetries and exact interaction solutions to the variable coefficient KdV equation[J]. Applied Mathematics Letters, 2019, 88:132-140.
- [64] Hu X R, Yong C. Nonlocal symmetries and negative hierarchies related to bilinear Backlund transformation[J]. Chinese Physics B, 2015, 24(3):030201.
- [65] Lei Y, Lou S Y. Interactions among periodic waves and solitary waves of the (2+1)-dimensional Konopelchenko-Dubrovsky equation[J]. Chinese Physics Letters, 2013, 30(6):060202.
- [66] Lou S Y. Consistent Riccati expansion for integrable systems[J]. Studies in Applied Mathematics, 2015, 134(3): 372-402.
- [67] Cheng X P, Wang J Y, Ren B, et al. Interaction behaviours between solitons and cnoidal periodic waves for (2+1)-dimensional Caudrey-Dodd-Gibbon-Kotera-Sawada equation[J]. Communications in Theoretical Physics, 2016, 66(2):163-170.
- [68] Wang Y H, Wang H, Zhang H S, et al. Exact interaction solutions of an extended (2+1)-dimensional shallow water wave equation[J]. Communications in Theoretical Physics, 2017, 68(2):165-169.
- [69] Hu H C, Li Y Y, Zhu H D. Residual symmetry, interaction solutions and consistent tanh expansion solvability for the third-order Burgers equation[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2018, 108:77-81.
- [70] Keane A J, Mushtaq A, Wheatland M S. Alfvén solitons in a Fermionic quantum plasma[J]. Physical Review E, 2011, 83(6):066407.

Nonlocal symmetries of nonlinear system and corresponding applications

CHENG Xueping^{1,2}

(1.Physics, Mathematics and Information College, Zhejiang Ocean University, Zhoushan 316022, China;

2.Key Laboratory of Oceanographic Big Data Mining & Application of Zhejiang Province, Zhoushan 316022, China)

Abstract: The nonlocal symmetry, as an important part of symmetry theory, has attracted more and more attention in recent years. Taking the potential KdV equation, the mKdV equation and the KP equation as examples, we introduce the Bäcklund transformation related nonlocal symmetry, the nonlocal residual symmetry and the Darboux transformation related nonlocal symmetry of nonlinear systems. After inducing three auxiliary variables, the Darboux transformation related nonlocal symmetry of KP equation is localized into the Lie point symmetry of an extended nonlinear system. Based on this system, we briefly summarize the similarity reduction solutions of the KP equation by applying the symmetry reduction method, which includes the interaction solution between soliton and Boussinesq wave, the interaction solution between soliton and KdV-type wave, and the single solitary wave with a nonhomogeneous background.

Key words: nonlocal symmetry; Bäcklund transformation related nonlocal symmetry; nonlocal residual symmetry; Darboux transformation related nonlocal symmetry; localization; symmetry reduction; interaction solution

(责任编辑 章踐立)