

对称理论在解若干非线性问题中的应用

刘希忠

(绍兴文理学院 数理信息学院, 浙江 绍兴 312000)

摘要: 将摄动理论和对称约化理论结合起来对研究扰动非线性方程具有重要的意义. 本文利用近似对称约化理论研究了扰动 mKdV 方程, 得到了该方程的各阶近似约化方程和级数约化解. 本文还讨论了同伦近似对称方法在求解不可积系统中的应用以及利用对称和守恒律的关系求解非线性系统的无穷多守恒律等问题.

关键词: 对称; 摄动理论; 近似约化解; 守恒律; 同伦近似对称

中图分类号: O411.1

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2020) 05-0077-06

对称概念起源于空间物体的几何形态在人们头脑中的反映. 在物理学中, 群论提供了一种将体系的对称性质分类而加以研究的数学表述形式. 在微分方程理论中, 对称性理论也是极其重要的, 因为非线性系统的对称不仅提供了一种获得其严格解和特解的方法, 还具备获得非线性方程的渐近解以及设计、测试和评价数值计算等许多方面的应用.

Lou 等^[1]在 2000 年提出了条件相似约化的概念, 利用直接约化法的思想获得了(2+1)维 KdV 方程的各种新的条件相似约化, 条件相似约化的结果不能由非经典理论得到, 而该方法对于很多方程都很有效^[2-3]. 2004 年, Lou 等^[4]指出一个对称可以具有无穷多不变量. 2005 年, Lou 和 Ma 巧妙地 CK 直接法的基础上构造了一种修正的直接法^[5-6], 后来又提出了针对 Lax 可积系统的求解对称群的方法^[7], 这两种方法被统称为新对称群理论. 在传统的李群理论中, 人们总是先求出方程的点李对称, 然后利用李群第一基本定理来求解对称变换群. 相反地, 在新对称群理论中可以先由简单的直接法得到对称变换群. 该方法可以由已知解寻求未知解, 并由此利用简单的取极限方法得到相应的点李对称和李代数.

许多偏微分方程依赖于小参数, 因此, 寻找这

类方程的相似解就具有重要的意义. 近似对称的概念是由 Fushchich 等^[8]提出的, 它可以被用在具有扰动项的方程中^[9-10]. 在文献[11]中, 类比于近似对称方法, 将摄动理论、对称约化和直接法相结合, 提出了近似直接法并应用于扰动 Boussinesq 方程. 另外一种求解非线性问题的强大方法是由廖世俊^[12]提出的同伦分析方法, 这一方法被成功地应用于很多带有强扰动项的非线性问题中^[13-15]. 同伦分析方法的关键在于将非线性问题分解为无穷多的线性子问题. 由于这一变换不依赖于小参量, 同伦分析方法可以克服摄动方法中对小参量的依赖问题. 在文献[16-17]中将同伦分析方法和李群理论以及直接法相结合提出了同伦近似直接法和同伦近似对称法.

对于求解非线性问题, 扰动理论是一种重要的近似方法. 将因变量按照小参数进行展开, 可以逐级求解原方程的近似解. 将扰动法和李群理论结合起来求解非线性问题, 即近似对称, 最早始于 Baikov 等^[18-19], 在其工作中, 不是将因变量进行展开而是将无穷小生成元进行幂级数展开. 通过这种方法, 可以求解近似生成元并由此求出原方程的近似解. 第二种近似对称理论是由 Fushchich 等^[8]提出并由 Euler 等^[20-22]发展起来的, 在这一方法中, 因变量首先用小参量进行展开, 然后按照不同

近似将原方程分解为一族方程. 所得系统是耦合的, 原方程的近似对称就是近似方程的精确对称. 文献[23-24]比较了这两种近似对称方法, 得出的结论均为第一种近似对称法比第二种近似对称法更优越.

1 扰动 mKdV 方程的近似对称约化

利用近似对称约化方法求解下列形式的扰动 mKdV 方程:

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} + \epsilon(\gamma u^2u_{xxx} + \beta uu_xu_{xx} + \delta u_{xxxx} + \alpha u_x^3 - \zeta u^4u_x) = 0, \quad (1)$$

式中, ϵ 是一个小参数, γ 、 β 、 δ 、 α 和 ζ 为任意常数. 按照近似对称理论的一般步骤, 方程(1)的因变量 u 表示为如下扰动级数展开式:

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j u_j, \quad (2)$$

式中, u_j 为 x 和 t 的函数. 将方程(2)代入式(1)并令 ϵ 的不同幂次的系数为 0 就可以得到一组偏微分方程:

$$\begin{aligned} & u_{k,xxx} + 6 \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^j u_{l,x} u_{j-l} u_{k-j} + u_{k,t} + \\ & \gamma \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^j u_{i,xxx} u_{j-i} u_{k-1-j} - \\ & \zeta \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{l=0}^m \sum_{j=0}^l \sum_{i=0}^j u_{i,x} u_{j-i} u_{l-j} u_{m-l} u_{k-1-m} + \\ & \beta \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^j u_{i,x} u_{j-i} u_{k-1-j,xx} + \delta u_{k-1,xxxx} + \\ & \alpha \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^j u_{i,x} u_{j-i,x} u_{k-1-j,x} = 0, k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (3)$$

式中, $u_{-1} = 0$.

下面首先对方程(3)进行对称约化以得到相似约化解、约化方程和原扰动方程的级数解.

为求方程(3)的精确解, 首先构造它的点李对称并给出相应的对称约化. 点李对称可以表示为下面函数的形式:

$$\sigma_k = U_k - Xu_{k,x} - Tu_{k,t}, k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

其中 σ_k 需满足方程(3)的线性化方程.

将方程(4)代入方程(3)的线性化形式并利用方程(3)将 $u_{k,t}$ 消掉就可得到关于函数 X 、 T 和 U_k ($k = 0, 1, \dots$) 的决定性方程. 求解这些方程可以得到

$$\begin{aligned} X &= \frac{C_1}{3}x + C_3, \\ T &= C_1t + C_2, \\ U_0 &= -\frac{C_1}{3}u_0, U_1 = -C_1u_1, U_2 = -\frac{5C_1}{3}u_2, \dots, \\ U_k &= -\frac{2k+1}{3}C_1u_k, k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (5)$$

式中, C_1 、 C_2 和 C_3 为任意常数.

求解以下特征方程就可以得到相似约化解:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dt}{T}, \frac{du_0}{U_0} = \frac{dt}{T}, \frac{du_1}{U_1} = \frac{dt}{T}, \dots, \frac{du_k}{U_k} = \frac{dt}{T}, \dots, \quad (6)$$

下面分两种情形来进行讨论.

情形 1 当 C_1 不等于 0 时的对称约化.

当 $C_1 \neq 0$ 时, 可以不失一般性地做以下变换:

$$C_2 \mapsto C_1C_2, C_3 \mapsto \frac{1}{3}C_1C_3, \text{ 这时方程(5)变为}$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{3}C_1(x + C_3), T = C_1(t + C_2), \\ U_k &= -\frac{2k+1}{3}C_1u_k, k = 0, 1, \dots. \end{aligned} \quad (7)$$

从方程(6)和方程(7)得到相似变量

$$\xi = \frac{x + C_3}{\sqrt[3]{t + C_2}}, \quad (8)$$

关于 u_k 的相似解为

$$u_k = \frac{V_k(\xi)}{(t + C_2)^{\frac{2k+1}{3}}}, k = 0, 1, \dots, \quad (9)$$

这样就得到了原扰动方程(1)的级数解

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k V_k(\xi)}{(t + C_2)^{\frac{2k+1}{3}}}, \quad (10)$$

其中不变函数 V_k 满足约化方程

$$\begin{aligned} & 3V_{k,\xi\xi\xi} - (2k+1)V_k - \xi V_{k,\xi} + 18 \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^j V_{l,\xi} V_{j-l} V_{k-j} + \\ & + 3\delta V_{k-1,\xi\xi\xi\xi\xi} + 3\gamma \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^j V_{i,\xi\xi\xi} V_{j-i} V_{k-1-j} + \\ & 3\beta \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^j V_{i,\xi} V_{j-i} V_{k-1-j,\xi\xi} - \\ & 3\zeta \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{l=0}^m \sum_{j=0}^l \sum_{i=0}^j V_{i,\xi} V_{j-i} V_{l-j} V_{m-l} V_{k-1-m} + \\ & 3\alpha \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^j V_{i,\xi} V_{j-i,\xi} V_{k-1-j,\xi} = 0, k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (11)$$

式中, $V_{-1} = 0$.

方程(11)如果取 $k=0$ 则等价于 Painlevé II 型方程. 从方程(11)可以看出, 如果 $V_0, V_1, \dots, V_{n-1}$ 是已知的, 则它是一个关于 V_n 的三阶线性常微分方程. 事实上可以理论上依次计算 $V_0, V_1, \dots, V_n$, 为了更明显地看清楚这一点, 将方程(11)改写为

$$3V_{k,\xi\xi\xi\xi} - (2k+1)V_k - \xi V_{k,\xi} + 36V_{0\xi}V_0V_k + 18V_{k,\xi}V_0^2 = G_k, \quad (12)$$

式中, G_k 是一个只含有 $\{V_0, V_1, \dots, V_{k-1}\}$ 的函数, 具体表达式为

$$\begin{aligned} G_k \equiv & 3\zeta \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{l=0}^m \sum_{j=0}^l \sum_{i=0}^j V_{i,\xi} V_{j-i} V_{l-j} V_{m-l} V_{k-1-m} - \\ & 18 \sum_{l=1}^{k-1} V_{l,\xi} V_{k-l} V_0 - 18 \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=0}^j V_{l,\xi} V_{j-l} V_{k-j} - \\ & 3\gamma \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^j V_{i,\xi\xi\xi\xi} V_{j-i} V_{k-1-j} - \\ & 3\alpha \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^j V_{i,\xi} V_{j-i,\xi} V_{k-1-j,\xi} - \\ & 3\beta \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^j V_{i\xi} V_{j-i} V_{k-1-j,\xi\xi} - 3\delta V_{k-1,\xi\xi\xi\xi\xi\xi}. \end{aligned}$$

情形 2 当 C_1 等于 0 时的对称约化.

当 $C_1=0$ 时, 求解方程(6)可以得到下列相似解:

$$u_k = V_k(\xi), \quad k=0, 1, \dots, \quad (13)$$

其中的相似变量 $\xi = t - \frac{C_2}{C_3}x$ 可以改变为 $\xi = x + ct$, c 是任意的速度常数. 由此得到方程(13)的级数约化解

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k V_k(\xi), \quad (14)$$

将方程(13)代入方程(3), 可以得到 $V_k(\xi)$ 所满足的约化方程

$$\begin{aligned} & V_{k,\xi\xi\xi\xi} + cV_{k,\xi} + 6\sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^j V_{l,\xi} V_{j-l} V_{k-j} + \\ & \gamma \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^j V_{i,\xi\xi\xi\xi} V_{j-i} V_{k-1-j} + \delta V_{k-1,\xi\xi\xi\xi\xi\xi} + \\ & \beta \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^j V_{i\xi} V_{j-i} V_{k-1-j,\xi\xi} + \\ & \alpha \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^j V_{i,\xi} V_{j-i,\xi} V_{k-1-j,\xi} - \\ & \zeta \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{l=0}^m \sum_{j=0}^l \sum_{i=0}^j V_{i,\xi} V_{j-i} V_{l-j} V_{m-l} V_{k-1-m} = 0, \end{aligned}$$

$$k=0, 1, \dots, \quad (15)$$

式中, $V_{-1}=0$.

当 $k=0$ 时, 方程(15)的一般解可以表示为 Jacobi 椭圆函数

$$V_0 = -\sqrt{\frac{c}{-2+h_1^2}} J\left(-h_2 + \sqrt{\frac{c}{-2+h_1^2}} \xi, h_1\right), \quad (16)$$

式中, J 为 Jacobi DN 函数; h_1, h_2 为任意常数.

当 $V_0, V_1, \dots, V_{n-1}$ 已知时, n 阶相似约化方程(15)是一个关于 V_n 的三阶线性常微分方程. 与方程(11)类似, 通过方程(15)可以依次解出 V_n ($n=0, 1, 2, \dots$). 结果可以明显表示为

$$V_k = V_{0,\xi} \left[b_k + \int V_{0,\xi}^{-2} \left(c_k + \int V_{0,\xi} H_k d\xi \right) d\xi \right], \quad k=1, 2, \dots, \quad (17)$$

式中, b_k 和 c_k 为任意常数; H_k 是一个关于 $V_0, V_1, \dots, V_{k-1}$ 的函数, 具体表达式为

$$\begin{aligned} H_k \equiv & -6 \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=0}^j V_{l,\xi} V_{j-l} V_{k-j} - \delta V_{k-1,\xi\xi\xi\xi\xi\xi} - \\ & \gamma \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^j V_{i,\xi\xi\xi\xi} V_{j-i} V_{k-1-j} - 6 \sum_{l=1}^{k-1} V_{l,\xi} V_{k-l} V_0 + \\ & \zeta \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{l=0}^m \sum_{j=0}^l \sum_{i=0}^j V_{i,\xi} V_{j-i} V_{l-j} V_{m-l} V_{k-1-m} - \\ & \alpha \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^j V_{i,\xi} V_{j-i,\xi} V_{k-1-j,\xi} - \\ & \beta \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^j V_{i\xi} V_{j-i} V_{k-1-j,\xi\xi}. \end{aligned}$$

除了扰动 mKdV 方程, 用近似对称约化法和近似直接约化法求解扰动 Kaup-Kupershmidt 方程, 给出应用近似直接法对方程本身提出的限制条件, 得到方程的近似对称; 然后通过解特征方程发现各阶近似方程可以用一般通式来表示, 进而给出相似约化解和原方程的级数相似解. 对于各阶相似约化方程, 可给出第一阶相似约化方程的精确解. 由于第 k 阶相似约化方程是关于第 k 个未知函数的线性变系数常微分方程, 因此理论上可以依次求出各相似解. 通过比较近似对称约化和近似直接约化所得的结果, 发现近似直接约化的结果包含了近似对称约化的结果. 这是因为, 虽然求解的是原方程的扰动解, 但对于各阶近似方程来说, 得到的对称解是精确的, 而一般来说直接法所得结果包含了经典李对称的结果, 多出来的部分可

以通过非经典李群法对各阶近似方程进行约化来得到.

2 总结与讨论

本文将摄动理论和对称约化理论结合起来给出了扰动 mKdV 方程的级数约化解. 类似地, 同伦近似相似约化是将同伦理论和近似相似约化相结合, 通过构造微分方程的同伦模型, 将模型中的同伦参数视作小参数进行近似相似约化以研究原方程. 首先构造出 Kawahara 方程和广义 Kawahara 方程的同伦模型, 然后利用近似相似对称约化法求出这两个方程同伦模型的各阶相似约化方程最终原方程的同伦级数解. 利用同伦近似直接约化方法求出了广义 Kawahara 方程的各阶相似约化解、各阶相似约化方程以及原方程的同伦级数约化解, 通过与同伦对称约化相应结果比较后发现, 当同伦辅助参数取定时, 同伦直接约化的结果包含了同伦对称约化的结果. 从各阶相似约化方程可以看到, 当下标为 $\{0, 1, \dots, k-1\}$ 的量已知时, 第 k 阶相似约化方程是关于下标为 k 的量的常微分方程, 因此理论上可以将这些未知量依次求出. 由于同伦近似相似约化是通过引入同伦参数将方程分解为含有无数个子方程的系统, 因此与普通的近似相似约化方法相比具有一定的优势. 首先, 通过适当调节同伦参数就可以得到近似相似约化的结果; 其次, 可以利用调节辅助参数的方法来调节同伦级数的收敛性; 最后, 不同于近似相似约化, 同伦近似相似约化不依赖于小参数, 因此对不含微扰项的方程也适用.

寻找方程的对称是研究非线性偏微分方程中的一个重要方面. 由于无穷多对称和守恒律的存在, 对称性的研究在可积模型中尤为重要. 在经典李群理论中, 首先给出可积系统的点李对称, 然后通过求解相应常微分方程组的初值问题就可以得到对应的李群. 然而, 对于有些初值问题的求解还是非常困难的, 而且, 在有些情况下即使得到了显示表达式却可能因为其过于繁琐而难以得到应用.

楼森岳教授在 CK 直接法的基础上建立了修正的 CK 直接法^[5]以及利用 Lax 对求解非线性可积系统对称群的新的方法^[7], 这两种方法称为新对称群理论. 利用该理论, 可以比较简单的直接得到非线性

性系统的对称群, 而相关的对称代数可以通过取极限较为容易的得到. 应用新的对称群理论除了可以得到点李对称群外还可以得到非线性系统的离散群和非局域群. 例如, 利用修正的 CK 直接法可以得到 Lin-Tsien 的新的贝克隆变换. 再利用对称群变换定理, 通过简单的取极限的过程可以得到点李对称群和相应的 KMV 对称代数. 对于该方程经过计算后发现, 用修正的 CK 直接法求得的点李对称群和用经典李对称求得的点李对称群完全相同.

另一方面, 对称和守恒量的存在性之间的关系是一个非常复杂的数学物理问题. 从直观来讲, 对称性和守恒律应该有着密切的联系, 这种联系在著名的诺特定理^[25]中被揭示出来. 在经典的诺特定理中, 如果一个微分方程有变分原理, 则作用在泛函作用量上相差散度意义下不变的连续对称对应着一个守恒律^[26-29]. 在欧拉-拉格朗日方程中, 诺特定理一直是能将求守恒律问题转化为求方程对称问题的唯一方法. 文献[30]给出了这一关于不变性和守恒律关系基本定理的精确阐述和证明. 应用 Noether 定理的前提是找到方程的欧拉-拉格朗日形式, 在变分法的研究中有许多工作是研究相反的问题, 即已知方程的守恒律然后确定方程的欧拉-拉格朗日形式^[31]. 近年来, 人们发展了种种求解特殊的被称为拉克斯方程守恒律的有效方法. 2000 年, Kara 等^[32]建立了微分方程的欧拉-拉格朗日形式, 然后来求解方程的 Lie-Bäcklund 对称生成元和守恒量之间的直接关系, 利用这一关系可以从对称中得到守恒律^[33].

例如, 对于 Lin-Tsien 方程和 Potential Nizhnik-Novikov-Veselov 方程, 利用二阶 Lie-Bäcklund 算子求得了相应的无穷维 KMV 代数的守恒律. 在求解过程中, 不需要利用方程的拉格朗日结构或哈密顿结构, 也不需要知道运动恒量. 而且利用该方法得到的守恒律中存在群不变量的任意函数, 说明相应于点李对称的守恒律有无穷多个, 守恒律只与点李对称有关系而与具体的方程无关, 即具有相同点李对称群的方程族具有相同的二阶守恒律. 因此, 一个对称可以对应无穷多守恒律, 有无穷多守恒律的非线性系统不一定是可积的; 多项式微分系统存在非多项式型的无穷多守恒律.

参考文献:

- [1] Lou S Y, Tang X Y, Lin J. Similarity and conditional similarity reductions of a (2+1)-dimensional KdV equation via a direct method[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2000, 41(12):8286-8303.
- [2] Lou S Y, Tang X Y. Conditional similarity reduction approach: Jimbo-Miwa equation[J]. *Chinese Physics*, 2001, 10(10):897-901.
- [3] Tang X Y, Lin J, Lou S Y. Conditional similarity solutions of the Boussinesq equation[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2001, 35(4):399-404.
- [4] Lou S Y, Tang X Y. Equations of arbitrary order invariant under the Kadomtsev-Petviashvili symmetry group[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2004, 45(3):1020-1030.
- [5] Lou S Y, Ma H C. Non-Lie symmetry groups of (2+1)-dimensional nonlinear systems obtained from a simple direct method[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2005, 38(7):L129-L137.
- [6] Ma H C, Lou S Y. Solutions generated from the symmetry group of the (2+1)-dimensional sine-Gordon system[J]. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 2005, 60(4):229-236.
- [7] Lou S Y, Ma H C. Finite symmetry transformation groups and exact solutions of Lax integrable systems[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2006, 30(4):804-821.
- [8] Fushchich W I, Shtelen W M. On approximate symmetry and approximate solutions of the nonlinear wave equation with a small parameter[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1989, 22(18):L887-L890.
- [9] Jia M, Wang J Y, Lou S Y. Approximate symmetry reduction to the perturbed one-dimensional nonlinear Schrödinger equation[J]. *Chinese Physics Letters*, 2009, 26(2):020201.
- [10] Yao R X, Jiao X Y, Lou S Y. Approximate symmetries and infinite series symmetry reduction solutions to perturbed Kuramoto-Sivashinsky equation[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2009, 51(5):785-788.
- [11] Jiao X Y, Yao R X, Lou S Y. Approximate similarity reduction for singularly perturbed Boussinesq equation via symmetry perturbation and direct method[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2008, 49(9):093505.
- [12] 廖世俊. 非线性问题的同伦分析技术[D]. 上海: 上海交通大学, 1992.
- [13] Hayat T, Sajid M. On analytic solution for thin film flow of a fourth grade fluid down a vertical cylinder[J]. *Physics Letters A*, 2007, 361(4/5):316-322.
- [14] Liao S J. Comparison between the homotopy analysis method and homotopy perturbation method[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2005, 169(2):1186-1194.
- [15] Liao S J. An explicit, totally analytic approximate solution for Blasius viscous flow problems[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1999, 34(4):759-778.
- [16] Jiao X Y, Yao R X, Lou S Y. Approximate homotopy direct reduction method: Infinite series reductions to perturbed mKdV equations[J]. *Chinese Physics Letters*, 2009, 26(4):040202.
- [17] Jiao X Y, Gao Y, Lou S Y. Approximate homotopy symmetry method: Homotopy series solutions to the sixth-order Boussinesq equation[J]. *Science in China Series G: Physics, Mechanics and Astronomy*, 2009, 52(8):1169-1178.
- [18] Baikov V A, Gazizov R K, Ibragimov N H. Approximate symmetries of equations with a small parameter[J]. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1989, 64:427-441.
- [19] Baikov V A, Gazizov R K, Ibragimov N H. Approximate Transformation Groups and Deformations of Symmetry Lie Algebras[M]. Boca Raton, Florida: CRC Press, 1995.
- [20] Euler N, Shul'ga M W, Steeb W H. Approximate symmetries and approximate solutions for a multi-dimensional Landau-Ginzburg equation[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1992, 25(18):L1095-L1103.
- [21] Euler M, Euler N, Köhler A. On the construction of approximate solutions for a multidimensional nonlinear heat equation[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1994, 27(6):2083-2092.
- [22] Euler N, Euler M. Symmetry properties of the approximations of multidimensional generalized van der Pol equations[J]. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 1994, 1(1):41-59.
- [23] Pakdemirli M, Yürüsoy M, Dolapçı İ T. Comparison of approximate symmetry methods for differential equations [J]. *Acta Applicandae Mathematicae*, 2004, 80(3):243-271.
- [24] Wiltshire R. Two approaches to the calculation of approximate symmetry exemplified using a system of advection-diffusion equations[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2006, 197(2):287-301.
- [25] Noether E. Invariante variations probleme[J]. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1918, 1:235-257.
- [26] Bessel-Hagen E. Über die erhaltungssätze der elektrodynamik[J]. *Mathematische Annalen*, 1921, 84(3/4):258-

- 276.
- [27] Ibragimov N H. Transformation Groups Applied to Mathematical Physics[M]. Dordrecht, Netherlands: Springer, 1985.
- [28] Olver P J. Applications of Lie Groups to Differential Equations[M]. New York: Springer, 1986.
- [29] Bluman G W, Kumei S. Symmetries and Differential Equations[M]. New York: Springer, 1989.
- [30] Andrzej T. Noether equations and conservation laws[J]. Communications in Mathematical Physics, 1967, 6:248-261.
- 261.
- [31] Anderson I M, Duchamp T E. Variational principles for second-order quasi-linear scalar equations[J]. Journal of Differential Equations, 1984, 51(1):1-47.
- [32] Kara A, Mahomed F. Relationship between symmetries and conservation laws[J]. International Journal of Theoretical Physics, 2000, 39(1):23-40.
- [33] Jia M, Gao Y, Lou S Y. Conservation laws of equation family with same Kac-Moody-Virasoro symmetry[J]. Physics Letters A, 2010, 374(15/16):1704-1711.

Application of symmetry theory in solving nonlinear problems

LIU Xizhong

(College of Mathematics, Physics and Information, Shaoxing University, Shaoxing 312000, China)

Abstract: The approximate symmetry method, which combines perturbation theory and Lie symmetry approach, proves very effective in solving perturbed nonlinear systems. In this paper, we investigate the perturbed mKdV equation using the approximate symmetry method to obtain its symmetry reduction equations of different orders and series reduction solutions. Also, we discuss the role of approximate homotopy symmetry method in solving non-integrable systems and how to acquire infinitely many conservation laws using the relationship between symmetry and conservation laws.

Key words: symmetry; perturbation theory; approximate reduction solution; conservation law; approximate homotopy method

(责任编辑 韩 超)