

Kac-Moody-Virasoro 可积系统

赵后亮^{1,2}, 贾 曼^{1,2}, 楼森岳^{1,2*}

(1. 宁波大学 物理科学与技术学院, 浙江 宁波 315211; 2. 宁波大学 清洁能源存储与转换实验室, 浙江 宁波 315211)

摘要: 通过研究 Kadomtsev-Petviashvili(KP)方程对称, 得到相应的无穷维李代数——Kac-Moody-Virasoro(KMV)代数, 并运用 KMV 代数的生成元和其中一个子代数——Virasoro 代数的延拓结构, 推导出熟知的 Kadomtsev-Petviashvili(KP)方程, 并以此为基础得到更多高阶(2+1)维和(3+1)维的可积模型, 并且这些模型都具有 KMV 代数性质.

关键词: 李群; 李代数; Kac-Moody-Virasoro 代数; KP 方程组; CK 直接法; 可积性

中图分类号: O415

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2020) 05-0083-10

对称是研究现代数学物理的一个重要方法, 它可以反映一个系统的很多性质和信息, 例如在标准模型中描述 3 种基本相互作用(强相互作用、弱相互作用、电磁相互作用)和基本粒子所用到的拉格朗日量具有 $SU_3 \times SU_2 \times U_1$ 对称群. 并且对于每一个对称, 系统都相应的拥有一个守恒量, 例如我们通常熟知的空间平移对称性对应于动量守恒定律, 时间平移不变性对应于能量守恒定律, 空间转动不变性对应于角动量守恒等. 这些对称性的应用和研究极大地加深了人们对自然规律的理解. 其实早在 1873 年, Lie^[1-2]就建立了连续对称理论, 并将其应用到微分方程的求解中, 使得人们对微分方程的理解更加深刻, 求解变得更加方便简洁. 通过运用对称的方法, 我们可以使一个高阶的微分方程降阶, 或者从一个已知的解变换出新解. 通常一个连续的李变换对称都对应地拥有一个李代数结构. 对于方程 $F(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots) = 0$ 而言, 找到它的对称和李代数就显得尤为重要. 一旦方程的对称和李代数给定, 那么我们就可以找到更多的满足方程的解, 并且对这些解的结构进行分析. 另外, 通过研究李对称和李代数, 我们还可以在原有模型的基础上建立更多的可积模型, 这些新的可积模型可能会在之后的各个科学领域中起到很大作用.

通常研究都不仅局限于(1+1)维情况, 且高维可积模型越来越受到很多学者的广泛关注, 例如 $(2n+1)$ 维时空下的自对偶杨-米尔斯方程^[3]、 $\mathfrak{R}^{n+1}$ 上的广义 AKNS 系统^[4]都已被广泛地研究过, 还有物理上重要的 Kadomtsev-Petviashvili 方程^[5-7]和 Toda 场方程^[6-7]等, 都是数学物理研究的前沿和热门. 所以, 我们不禁要问, 是否存在更多高阶的可积模型? 它们具体是什么样的? 拥有什么样的结构? 怎样才能找到它们? 基于这些问题, 专家学者们提出了很多不同的方法, 用来得到一系列高阶的高维可积模型, 例如 Painlevé 方法^[8-12]和高维形变方法^[13-20]. 本文主要通过 KMV 型对称代数以及它的一个子代数——Virasoro 型代数, 并从 KP 方程出发, 找到更多的高维高阶可积模型.

1 Virasoro 型代数

KP 方程

$$\left(u_t + \frac{3}{2}uu_x + u_{xxx}\right)_x + \frac{3}{4}\delta u_{yy} = 0, \delta = \pm 1, \quad (1)$$

是一个在数学和物理上都非常重要的非线性方程, 有时也被称为 2 维 Korteweg-de Vries (KdV)方程. 其对称可以被描述为: 如果 $u(t, x, y)$ 是 KP 方程的一个解, 那么 $u' = [g \circ u](t', x', y')$ 也是 KP 方程的一个解^[20], g 是它的一个对称, 则这些对称可以组成

收稿日期: 2020-05-11.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journal.g.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(11975131, 11675084); 宁波市自然科学基金(2015A610159); 宁波大学王宽诚幸福基金.

第一作者: 赵后亮(1994-), 男, 山西阳泉人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 非线性物理. E-mail: qlzhao233@qq.com

*通信作者: 楼森岳(1957-), 男, 浙江宁波人, 教授, 主要研究方向: 非线性物理. E-mail: lousenyue@nbu.edu.cn

相应的 KP 方程的对称群(李群). KP 方程的对称可以表示为: 如果 u 是式(1)的解, 那么变换

$$u' \rightarrow u + \varepsilon \sigma, \quad (2)$$

得到的 u' 也是式(1)的解, ε 是一个无穷小参数. σ 满足方程:

$$\left(\sigma_t + \frac{3}{2} \sigma u_x + \frac{3}{2} u \sigma_x + \sigma_{xxx} \right)_x + \frac{4}{3} \delta \sigma_{yy} = 0, \quad (3)$$

从中我们可以得到对称群的 3 个生成元, 分别为:

$$Z(h) = hu_x - \frac{2}{3} \dot{h}, \quad (4)$$

$$Y(g) = -2gu_y + \frac{4}{3} \delta \dot{g}yu_x - \frac{8}{9} \delta y \ddot{g}, \quad (5)$$

和

$$X(f) = fu_t + \frac{1}{3} \left(x\dot{f} - \frac{2}{3} \delta y^2 \ddot{f} \right) u_x + \frac{2}{3} \dot{f}(yu)_y - \frac{4}{27} \left(\frac{3}{2} x\ddot{f} - \delta y^2 \ddot{f} \right), \quad (6)$$

其中, f 、 g 和 h 都是 t 的任意函数.

这些生成元所组成的对称代数可以写为^[20]:

$$[X(f_1), X(f_2)] = X(f_1 \dot{f}_2 - \dot{f}_1 f_2), \quad (7)$$

$$[X(f), Y(g)] = Y(f\dot{g} - \frac{2}{3} \dot{f}g), \quad (8)$$

$$[X(f), Z(h)] = Z(f\dot{h} - \frac{1}{3} \dot{f}h), \quad (9)$$

$$[Y(g_1), Y(g_2)] = \frac{2}{3} \sigma Z(\dot{g}_1 g_2 - g_1 \dot{g}_2), \quad (10)$$

$$[Y(g), Z(h)] = 0, \quad (11)$$

$$[Z(h_1), Z(h_2)] = 0. \quad (12)$$

这里的对易子可以定义为:

$$[G, H] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \epsilon} (G(u + \epsilon H) - H(u + \epsilon G)) = G'H - H'G. \quad (13)$$

可以很容易看到, 式(7)构成一个封闭的子代数, 此代数就是我们所熟知的 Virasoro 代数. 特别的, 当取 $f(t) = \exp(rt)$ 或 $f(t) = t^r (r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, 式(7)就可以约化成一个无中心的 Virasoro 代数. 式(8)和(9)构成 Kac 代数, 式(10)~(12)则构成 Moody 代数. 所以整个李代数也叫做 Kac-Moody-Virasoro (KMV)代数^[21-23].

事实上, 这个对称代数的一般元素可写为^[20]:

$$V = X(f) + Y(g) + Z(h), \quad (14)$$

其中,

$$X(f) = f(t)\partial_t + \left[\frac{1}{3} x\dot{f}(t) - \frac{2}{9} \sigma y^2 \ddot{f}(t) \right] \partial_x + \frac{2}{3} y \cdot$$

$$\dot{f}(t)\partial_y - \left[\frac{4\sigma}{27} y^2 \ddot{f}(t) - \frac{2}{9} x\ddot{f}(t) + \frac{2}{3} u\dot{f}(t) \right] \partial_u,$$

$$Y(g) = g(t)\partial_y - \frac{2}{3} \sigma y\dot{g}(t)\partial_x - \frac{4\sigma}{9} y\ddot{g}(t)\partial_u,$$

$$Z(h) = h(t)\partial_x + \frac{2}{3} \dot{h}(t)\partial_u, \quad (15)$$

其中, $f(t)$ 、 $g(t)$ 和 $h(t)$ 是 $C^\infty(\mathbf{R})$ 上的任意函数, 函数上的一点表示对 t 求导. 或者它还拥有一个矢量场的形式:

$$\mathbf{V} = \tau(t, x, y, u)\partial_t + \chi(t, x, y, u)\partial_x + \eta(t, x, y, u)\partial_y + \varphi(t, x, y, u)\partial_u. \quad (16)$$

本文中我们重点研究式(7), 并从它出发找到更多高阶的可积模型; 同时, 因为对于其他高维系统(例如 Davey-Stewartson 方程^[24-26]和(2+1)维 Sawada-Kotera 方程^[27])的李代数而言, 都存在式(7)型的 Virasoro 代数, 这也启发我们从式(7)出发, 或许可以找到更多的高维可积模型.

2 Virasoro 代数下的(2+1)维可积模型

根据文献[28]中的理论: 如果某个模型存在一个对于任意函数 $f(t)$ 都满足的对称, 同时此对称还满足式(7), 那么该模型就是可积的. 基于这个理论, 我们可以从式(16)出发, 做它满足式(7)的延拓结构, 从中就可以得到相应的可积模型. 并且, 延拓结构做到几阶, 我们就得到相应阶数的可积模型.

对于式(16)来说, 为了满足式(7), 我们可以取:

$$T(x, y, t, u) = -f(t), \quad (17)$$

同时, X 、 Y 和 U 应该满足如下的形式:

$$(X, Y, U) = \sum_{i=1}^n f^{(i)}(X_i, Y_i, U_i). (n=1, 2, 3, \dots), \quad (18)$$

其中, $f^{(i)} = (d^i / dt^i) f$ 和 X_i 、 Y_i 、 U_i 是 $\{x, y, t, u\}$ 的函数, 它们需要满足对称代数 $\sigma = V$, 才能保证满足式(7). 为了得到一些好的结论, 我们设 $n=3$, 矢量 $\mathbf{V}$ 则有:

$$\sigma(f) = \mathbf{V}_1 = -f(t)\partial_t - (c_2 x\dot{f} + c_3 y^2 \ddot{f})\partial_x - c_3 \dot{f}y\partial_y + (c_1 \dot{f}u + c_4 x\ddot{f} + c_6 y^2 \ddot{f})\partial_u, \quad (19)$$

其中, $c_2 = 1 - c_1$ 、 $c_3 = (1 + c_2)/2$, c_1 、 c_4 、 c_5 和 c_6 是 4 个任意常数.

之后我们需要对矢量 $\mathbf{V}$ 做延拓, 将它延拓到 k 阶, 有

$$pr^{(k)} \circ \mathbf{V} = \mathbf{V} + U^x \partial_{u_x} + U^y \partial_{u_y} + U^{xx} \partial_{u_{xx}} + \\ U^{xy} \partial_{u_{xy}} + U^{xt} \partial_{u_{xt}} + \dots = \mathbf{V} + \\ \sum_{1 \leq i+j+l \leq k} U^{x^i y^j t^l} \partial_{u_{x^i y^j t^l}} (u_{x^i y^j t^l} \equiv \partial_x^i \partial_y^j \partial_t^l u). \quad (20)$$

其中,

$$U^x = D_x(U - Xu_x - Yu_y - Tu_t) + \\ Xu_{xx} + Yu_{xy} + Tu_{xt}, \quad (21)$$

$$U^y = D_y(U - Xu_x - Yu_y - Tu_t) + \\ Xu_{xy} + Yu_{yy} + Tu_{yt}, \quad (22)$$

$$U^t = D_t(U - Xu_x - Yu_y - Tu_t) + \\ Xu_{xt} + Yu_{ty} + Tu_{tt}, \quad (23)$$

$$U^{x^i y^j t^l} = D_x U^{x^{i-1} y^j t^l} - (D_x X) u_{x^{i-1} y^j t^l} - \\ (D_x Y) u_{x^{i-1} y^{j+1} t^l} - (D_x T) u_{x^{i-1} y^j t^{l+1}}, \quad (24)$$

$$U^{x^i y^j t^l} = D_t U^{x^i y^j t^{l-1}} - (D_t X) u_{x^i y^j t^{l-1}} - \\ (D_t Y) u_{x^i y^j t^l} - (D_t T) u_{x^i y^{j-1} t^{l+1}}, \quad (25)$$

$$U^{x^i y^j t^l} = D_t U^{x^i y^j t^{l-1}} - (D_t X) u_{x^{i+1} y^j t^{l-1}} - \\ (D_t Y) u_{x^i y^{j+1} t^{l-1}} - (D_t T) u_{x^i y^j t^l}, \quad (26)$$

其中, D_x 、 D_y 和 D_t 表示全微分.

对于 $\mathbf{V}_1$ 来说, 我们按照上面的方式做延拓, 可以得到:

$$pr^{(k)} \circ \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_1 + (\dot{f}_x + c_4 \ddot{f}) \partial_{u_x} + [(c_1 + c_3) \dot{f}_y + \\ 2c_5 y u_x \ddot{f} + 2c_6 y \ddot{f}] \partial_{u_y} + [(1 + c_1) \dot{f}_t + (c_1 u + \\ c_2 x u_x + c_3 u_y) \ddot{f} + (c_4 x + c_5 y^2 u_x) \ddot{f} + \\ c_6 y^2 \ddot{f}] \partial_{u_t} + \sum_{l=2}^k (1 + (i-1)c_2) \dot{f}_x \partial_{u_{xy}} + \\ [(1 + 3c_3) \dot{f}_{xy} + 2c_5 y \ddot{f}_{xx}] \partial_{u_{xy}} + [(1 + 2c_3) \cdot \\ \dot{f}_{xyy} + 2c_5 \ddot{f}(u_{xx} + 2yu_{xxy})] \partial_{u_{xyy}} + \\ [(1 + 3c_3) \dot{f}_{xyyy} + 6c_5 \ddot{f}(u_{xxy} + yu_{xxyy})] \cdot \\ \partial_{u_{xyyy}} + [(1 + 4c_3) \dot{f}_{xy^4} + c_5 \ddot{f}(12u_{xxyy} + \\ 8yu_{xxy^3})] \partial_{u_{xy^4}} + [2 \dot{f}_{yy} + 2c_5 \ddot{f}(u_x + \\ 2yu_{xy}) + 2c_6 \ddot{f}] \partial_{u_{yy}} + [(2 + c_3) \dot{f}_{yyy} + \\ 6c_5 \ddot{f}(u_{xy} + yu_{xyy})] \partial_{u_{yyy}} + [(2 + c_3) \dot{f}_{yyy} + \\ 6c_5 \ddot{f}(u_{xy} + yu_{xyy})] \partial_{u_{yyy}} + [(1 + c_1 + c_3) \dot{f}_{ty} + \\ \ddot{f}((c_1 + c_3)u_y + c_2 x u_{xy} + c_3 y u_{yy} + \\ 2c_5 y u_{tx}) + c_5 \ddot{f}(2yu_x + y^2 u_{xy}) +$$

$$2c_6 y \ddot{f}] \partial_{u_{ty}} + [2 \dot{f}_{tx} + \ddot{f}(u_x + c_2 x u_{xx} + \\ c_3 y u_{xy}) + \ddot{f}(c_4 + c_5 y^2 u_{xx})] \partial_{u_{tx}} + \dots \quad (27)$$

对于每个阶数 k , 我们都可以从式(21)~(26)中找到延拓系数进行延拓.

接下来的步骤就是从上面对称中获得不变方程. 一般来说, 一个 k 阶不变方程有如下形式:

$$F(x, y, t, u, u_x, u_y, u_t, \dots, u_{x^i y^j t^l} \dots), \\ (0 \leq i + j + l \leq k), \quad (28)$$

并且, F 要满足:

$$pr^{(k)} \mathbf{V}_1 \circ F = 0. \quad (29)$$

所以我们要做的就是将式(28)中的参数看成是独立变量, 然后寻找式(29)的特征值. 我们可以从这些特征值里得到一系列的不变量 $I_n(x, y, t, u, u_{x^i y^j t^l}, \dots)$ ($n=1, 2, \dots, N$), 用这些不变量可以组成很多不变方程, 而这些不变方程一般是上述不变量的任意函数, 可以写做:

$$H(I_1, I_2, I_3, \dots, I_N) = 0. \quad (30)$$

一般来说, I_n 是与 f 相关的, 所以由它们组成的任意函数 H 也是一个与 f 相关的方程, 因此, 我们通常需要选择 H 的适当表达式, 使得它与 f 无关.

为了得到 $\mathbf{V}_1$ 的不变元的确切表达式, 我们可以求解下列的特征方程:

$$\frac{dx}{-c_2 x \dot{f}} = \frac{dy}{-c_3 y \dot{f}} = \frac{dt}{-f} = \frac{du}{-c_1 u \dot{f} + c_4 x \ddot{f} + c_6 y^2 \ddot{f}} = \\ \frac{du_x}{u_x \dot{f} + c_4 \ddot{f}} = \frac{du_{x^i y^j t^l}}{U^{x^i y^j t^l}} = \dots \quad (31)$$

这里我们列举一些可以用到的有意义的解:

$$J_n = u_{nx} f^{1+(n-1)c_2} (u_{nx} \equiv u_{x^n} \equiv \partial_x^n u, \\ n = 2, 3, 4, \dots, k), \quad (32)$$

$$I_1 = y f^{-c_3}, \quad (33)$$

$$I_2 = x f^{-c_2} - c_5 y^2 f^{-2c_3} \dot{f}, \quad (34)$$

$$I_3 = u f^{c_1} + c_4 x f^{-c_2} \dot{f} - \frac{1}{2} (c_4 c_5 + c_6) y^2 f^{-2c_3} \dot{f}^2 + \\ c_6 y^2 f^{1-2c_3} \ddot{f}, \quad (35)$$

$$I_4 = u_x f + c_4 \dot{f}, \quad (36)$$

$$I_5 = u_y f^{c_1+c_3} + c_5 y f^{-c_3} \dot{f} (2u_x f + c_4 \dot{f}) + \\ 2c_6 y f^{1-c_3} \ddot{f} - c_6 y f^{-c_3} \dot{f}^2, \quad (37)$$

$$I_6 = u_t f^{c_1+1} + (c_1 I_3 + c_2 I_2 I_4 + c_3 I_1 I_5) \dot{f} + \\ (c_4 I_2 + c_5 I_1^2 I_4) (\ddot{f} - \dot{f}^2), \quad (38)$$

$$I_7 = u_{xy} f^{c_3+1} + 2c_5 u_{xx} f^{c_3} \dot{f}, \quad (39)$$

$$I_8 = u_{xy} f^{c_2+c_3+1} + 2c_5 u_{xxx} f^{c_3+c_2} \dot{f}, \quad (40)$$

$$I_9 = u_{yy} f^2 + 2c_5 (2y u_{xy} f + 2y^2 c_5 u_{xx} \dot{f} + u_x f) \dot{f} + (c_4 c_5 - c_6) \dot{f}^2 + 2c_6 \ddot{f}, \quad (41)$$

$$I_{10} = u_{tx} f^2 + [u_x f + c_2 x u_{xx} f^{2c_3-c_2} - (c_2 - 2c_3 + 1) c_5 y^2 u_{xx} f + c_3 y u_{xy} f] \dot{f} + (c_4 + c_5 y^2 u_{xx}) \ddot{f}. \quad (42)$$

这样, 最一般的不方程就可以写为:

$$H(J_n, I_m, n=2, 3, 4, \dots, k; m=1, 2, 3, \dots) = 0. \quad (43)$$

为了得到想要的可积模型, 需要从式(43)中选出那些与 f 无关的方程. 由于此举较为复杂, 所以我们在此举一个简单例子来说明. 取常数 $c_i (i=1, 2, \dots, 6)$ 为:

$$c_1 = \frac{2}{3}, c_2 = \frac{1}{3}, c_3 = \frac{2}{3}, c_4 = -\frac{1}{3A}, \\ c_5 = \frac{1}{6B}, c_6 = \frac{1}{6AB}, \quad (44)$$

其中, A 、 B 和 C 是任意常数. 那么下列的不方程:

$$H_1 \equiv I_{10} + A I_3 J_2 + A I_4^2 + B I_9 + C J_4 = 0, \quad (45)$$

就可以变为:

$$(u_t + A u u_x + C u_{xxx})_x + B u_{yy} = 0. \quad (46)$$

从中能很容易看到, $C \neq 0$ 时, 式(46)即为熟知 KP 方程; $C = 0$ 时, 它是 Khokhlov-Zabolotskaya (KZ) 方程. 当然我们还可以取不同的不变方程, 例如:

$$J_2 H_1 + E J_3^2 = 0, \quad (47)$$

和

$$H_1 + \sum_{n=2}^M C_n J_n^{n+2} = 0, (M=2, 3, \dots). \quad (48)$$

其中, A 、 B 、 C 、 C_n 和 E 都是常数. 在和式(44)一样的系数条件下, 它们分别化为:

$$u_{xx} [u_{tx} + (A u u_x + C u_{xxx})_x + B u_{yy}] + E u_{xxx}^2 = 0, \quad (49)$$

和

$$u_{tx} + A u u_{xx} + A u_x^2 + B u_{yy} + \sum_{n=2}^M C_n u_{nx}^{n+2} = 0. (M=2, 3, \dots). \quad (50)$$

当然, 对于不同 Virasoro 代数式(7)的表示, 我们用以上方法不仅可以得到众所周知的(2+1)维可积模型, 还可以得到更多新的其他可积模型, 并且

这些可积模型都具有 Virasoro 型的无穷维对称代数. 以下演示如何从这个代数推导出(3+1)维可积模型.

3 Virasoro 代数下的(3+1)维可积模型

为了得到(3+1)维可积模型, 需要将矢量 V 也取成(3+1)维 V 的形式:

$$V = X(x, y, z, t, u) \partial_x + Y(x, y, z, t, u) \partial_y + \\ Z(x, y, z, t, u) \partial_z + T(x, y, z, t, u) \partial_t + \\ U(x, y, z, t, u) \partial_u. \quad (51)$$

如前所述, 设:

$$T = -f(t),$$

$$\{X, Y, Z, T, U\} =$$

$$\left\{ \sum_{i=1}^n f^{(i)} X_i, \sum_{i=1}^n f^{(i)} Y_i, \sum_{i=1}^n f^{(i)} Z_i, \sum_{i=1}^n f^{(i)} U_i \right\}, \\ n=1, 2, 3, \dots,$$

并做 V 的 k 阶延拓, 则:

$$pr^{(k)} \circ V = V + U^x \partial_{u_x} + U^y \partial_{u_y} + U^z \partial_{u_z} + U^t \partial_{u_t} + \\ \dots + \sum_{1 \leq i+j+m+n \leq k} U^{x^i y^j z^m t^n} \partial_{u_{x^i y^j z^m t^n}} + \dots, \quad (53)$$

其中,

$$U^x = D_x (U - X u_x - Y u_y - Z u_z - T u_t) + X u_{xx} + \\ Y u_{xy} + Z u_{xz} + T u_{xt}, \quad (54)$$

$$U^y = D_y (U - X u_x - Y u_y - Z u_z - T u_t) + X u_{xy} + \\ Y u_{yy} + Z u_{yz} + T u_{yt}, \quad (55)$$

$$U^z = D_z (U - X u_x - Y u_y - Z u_z - T u_t) + X u_{xz} + \\ Y u_{yz} + Z u_{zz} + T u_{zt}, \quad (56)$$

$$U^t = D_t (U - X u_x - Y u_y - Z u_z - T u_t) + X u_{xt} + \\ Y u_{yt} + Z u_{zt} + T u_{tt}, \quad (57)$$

$$U^{x^i y^j z^m t^n} = D_x U^{x^{i-1} y^j z^m t^n} - (D_x X) u_{x^{i-1} y^j z^m t^{n-1}} - \\ (D_x Y) u_{x^{i-1} y^{j+1} z^m t^n} - (D_x Z) u_{x^{i-1} y^j z^{m+1} t^n} - \\ (D_x T) u_{x^{i-1} y^j z^m t^{n+1}}, \quad (58)$$

$$U^{x^i y^j z^m t^n} = D_y U^{x^i y^{j-1} z^m t^n} - (D_y X) u_{x^i y^{j-1} z^m t^{n-1}} - \\ (D_y Y) u_{x^i y^{j-1} z^{m+1} t^n} - (D_y Z) u_{x^i y^{j-1} z^m t^{n+1}}, \quad (59)$$

$$U^{x^i y^j z^m t^n} = D_z U^{x^i y^j z^{m-1} t^n} - (D_z X) u_{x^i y^j z^{m-1} t^{n-1}} - \\ (D_z Y) u_{x^i y^{j+1} z^{m-1} t^n} - (D_z Z) u_{x^i y^j z^{m-1} t^{n+1}} - \\ (D_z T) u_{x^i y^j z^m t^n}, \quad (60)$$

$$\begin{aligned}
U^{x^i y^j z^m t^n} &= D_z U^{x^i y^j z^{m-1} t^n} - (D_z X) u_{x^{i+1} y^j z^{m-1} t^n} - \\
&(D_z Y) u_{x^i y^{j+1} z^{m-1} t^n} - (D_z Z) u_{x^i y^j z^{m-1} t^n} - \\
&(D_z T) u_{x^i y^j z^{m-1} t^{n+1}}, \quad (61)
\end{aligned}$$

和之前类似, 将对称 $\sigma(f)$ 取为:

$$\begin{aligned}
\sigma(f) &= V_{I'} = -f(t) \partial_t - \dot{f} c_2 x \partial_x - \dot{f} c_3 y \partial_y - \\
&c_4 \dot{f} z \partial_z + (c_1 \dot{f} u + c_5 \dot{f} y z) \partial_u, \quad (62)
\end{aligned}$$

其中, c_1 、 c_2 、 c_3 和 c_4 满足关系 $c_1 + c_3 + c_4 = 1$. 可以验证, $V_{I'}$ 确实满足 Virasoro 代数式(7). 并做 $V_{I'}$ 的延拓结构, 有:

$$\begin{aligned}
pr^{(k)} \circ V_{I'} &= V_{I'} + (c_1 + c_2) \dot{f} \partial_{u_x} + [(c_1 + c_3) \dot{f} u_y + \\
&2c_5 z \dot{f}] \partial_{u_y} + [(c_1 + c_4) \dot{f} u_z + 2c_5 y \dot{f}] \partial_{u_z} + \\
&[(1 + c_1) \dot{f} u_t + (c_1 u + c_2 x u_x + c_3 y u_y + \\
&c_4 z u_z) \dot{f} + c_5 y z \dot{f}] \partial_{u_t} + [(1 + c_1 + c_2) \dot{f} u_{xt} + \\
&(c_2 x u_{xx} + c_3 y u_{xy} + c_4 z u_{xz} + (c_1 + c_2) u_x) \dot{f}] \cdot \\
&\partial_{u_{xt}} + [(1 + c_1 + c_3) \dot{f} u_{yt} + (c_2 x u_{xy} + c_3 y u_{yy} + \\
&c_4 z u_{yz} + (c_1 + c_3) u_y) \dot{f} + c_5 z \dot{f}] \partial_{u_{yt}} + [(1 + c_1 + \\
&c_4) \dot{f} u_{zt} + (c_2 x u_{xz} + c_3 y u_{yz} + c_4 z u_{zz} + (c_1 + \\
&c_4) u_z) \dot{f} + c_5 y \dot{f}] \partial_{u_{zt}} + (c_1 + c_2 + c_3) \dot{f} u_{xy} \partial_{u_{xy}} + \\
&(c_1 + c_2 + c_4) \dot{f} u_{xz} \partial_{u_{xz}} + [(c_1 + c_3 + c_4) \dot{f} u_{yz} + \\
&c_5 \dot{f}] \partial_{u_{yz}} \sum_{n=2}^k (1 + nc_2) \dot{f} u_{nx} \partial_{u_{nx}} + \sum_{n=2}^k (1 + nc_3) \cdot \\
&\dot{f} u_{ny} \partial_{u_{ny}} + \sum_{n=2}^k (1 + nc_4) \dot{f} u_{nz} \partial_{u_{nz}} + \\
&\sum_{3 \leq n+m+r \leq k} (1 + nc_2 + mc_3 + rc_4) \dot{f} u_{x^n y^m z^r} \cdot \\
&\partial_{u_{x^n y^m z^r}} + \sum_{2 \leq n+m+r \leq k-1} [(1 + c_1 + nc_2 + mc_3 + \\
&rc_4) \dot{f} u_{x^n y^m z^r t} + (c_2 x u_{x^{n+1} y^m z^r} + c_3 y u_{x^n y^{m+1} z^r} + \\
&c_4 z u_{x^n y^m z^{r+1}} + (c_1 + nc_2 + mc_3 + rc_4) \cdot \\
&u_{x^n y^m z^r}) \dot{f}] \partial_{u_{x^n y^m z^r t}} + \dots. \quad (63)
\end{aligned}$$

并让它作用在一个不变方程上, 则该不变方程一般可以写为:

$$\begin{aligned}
F'(x, y, z, t, u, u_x, u_y, u_z, u_t, \dots, \\
u_{x^i y^j z^m t^n}, \dots) &= 0, \quad (64)
\end{aligned}$$

作用之后可得:

$$pr^{(k)} \circ V_{I'} \circ F' = 0. \quad (65)$$

接下来解式(65)的特征方程:

$$\frac{dt}{-f} = \frac{dx}{-\dot{f} c_2 x} = \frac{dy}{-c_3 y \dot{f}} = \frac{dz}{-c_4 z \dot{f}} =$$

$$\frac{du}{c_1 u \dot{f} + c_5 y z \dot{f}} = \dots = \frac{du_{x^i y^j z^m t^n}}{U^{x^i y^j z^m t^n}} = \dots. \quad (66)$$

就可以得到一系列不变量 $I_r(x, y, z, t, u, u_x, \dots, u_{x^i y^j z^m t^n}, \dots)$ ($1 \leq i + j + m + n \leq k, r = 0, 1, 2, \dots$), 这些不变量可以组成不变方程:

$$H(I_1, I_2, I_3, \dots, I_r, \dots) = 0. \quad (67)$$

由于求解过多, 这里我们列举一些可以用到的典型不变量的例子:

$$I_1 = x f^{-c_2}, I_2 = y f^{-c_3}, \quad (68)$$

$$I_3 = z f^{-c_4}, I_4 = u_x f^{c_1+c_2}, \quad (69)$$

$$I_5 = f^{c_1+c_3} u_y + c_5 z f^{-c_4} \dot{f}, \quad (70)$$

$$I_6 = f^{c_1+c_4} u_z + c_5 y f^{-c_3} \dot{f}, \quad (71)$$

$$I_7 = f^{c_1+c_2+c_3} u_{xy}, \quad (72)$$

$$I_8 = f^{c_1+c_2+c_4} u_{xz}, I_9 = f^{c_1+2c_2} u_{xx}, \quad (73)$$

$$I_{10} = f^{c_1+c_3+c_4} u_{yz} + c_5 \dot{f}, \quad (74)$$

$$\begin{aligned}
I_{11} &= f^{1+c_1+c_2} u_{xt} + [(c_1 + c_2) I_4 + c_2 I_1 I_9 + \\
&c_3 I_2 I_7 + c_4 I_3 I_8] \dot{f}, \quad (75)
\end{aligned}$$

$$I_{12} = f^{c_1+2c_3} u_{yy}, I_{13} = f^{c_1+2c_4} u_{zz}, \quad (76)$$

$$J_n^x = f^{c_1+nc_2} u_{nx}, J_n^y = f^{c_1+nc_3} u_{ny}, \quad (77)$$

$$\begin{aligned}
J_n^z &= f^{c_1+nc_4} u_{nz}, J_{nmr} = f^{c_1+nc_2+mc_3+rc_4} u_{x^n y^m z^r}, \\
(3 \leq n + m + r \leq k), \quad (78)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{nmr} &= f^{1+c_1+nc_2+mc_3+rc_4} u_{x^n y^m z^r t} + [(c_1 + nc_2 + \\
&mc_3 + rc_4) J_{nmr} + c_2 I_1 J_{(n+1)mr} + c_3 I_2 J_{n(m+1)r} + \\
&c_4 I_3 J_{nm(r+1)}] \dot{f}, (2 \leq n + m + r \leq k-1). \quad (79)
\end{aligned}$$

将式(68)~(79)代入到式(43), 就可以得到了拥有 Virasoro 对称代数的(3+1)维可积模型. 但一般来说, 此模型是与 f 有关的. 为了得到与 f 无关的模型, 需要限制方程中那些常数的选取. 这里列举几个特殊的例子:

(i)取:

$$c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = c_4 = \frac{1}{2}, c_5 = -\frac{1}{2A}, \quad (80)$$

则不变方程式(43)就可以写成:

$$H'_1 \equiv I_{11} + A(I_5 I_8 + I_6 I_7) + B I_{12} + C I_{13} = 0, \quad (81)$$

其中, A 、 B 和 C 是任意常数.

这个方程可以得到一个与 f 无关的方程:

$$u_{xt} + A(u_y u_{xz} + u_z u_{xy}) + B u_{yy} + C u_{zz} = 0, \quad (82)$$

(ii)取:

$$c_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{A}{C}\right), c_2 = 0, c_3 = \frac{1}{2},$$

$$c_4 = \frac{A}{2C}, c_5 = -\frac{1}{2C}, \quad (83)$$

可以得到不变方程:

$$H_{2'} \equiv I_{11} + (A-C)I_4I_{10} - AI_5I_8 - CI_6I_7 + BI_{12} = 0. \quad (84)$$

从中也可以得到方程:

$$u_{xt} - A(u_y u_{xz} - u_x u_{yz}) - C(u_z u_{xy} + u_x u_{yz}) + Bu_{yy} = 0. \quad (85)$$

(iii)取:

$$c_1 = -Ac_5, c_2 = 0, c_3 = -Cc_5, c_4 = -Bc_5, \\ c_5 = \frac{1}{A+B+C}, \quad (86)$$

不变方程就变为:

$$H_{3'} \equiv I_{11} + AI_4I_{10} + BI_5I_8 + CI_6I_7 = 0. \quad (87)$$

其对应的方程为:

$$u_{xt} + Au_x u_{yz} + Bu_y u_{xz} + Cu_z u_{xy} = 0. \quad (88)$$

事实上,我们可以从(i)中的不变方程 H_1' 得到很多与 f 无关的不变方程,它们可以写为:

$$H_{nmr} \equiv H_i + \sum_{n,m,r} C_{nmr} J_{nmr}^\alpha = 0. \quad (89)$$

其中, $n+m+r \geq 3$, $\alpha = (1+c_1)/(c_1+nc_2+mc_3+rc_4)$, $H_i (i=1,2,3)$. 它们的系数与(i)中系数的取法是一样的. 并且从此算式出发,我们可以找到更多的(3+1)维可积模型.

虽然文中都是在讨论 Virasoro 代数下的可积模型,但实际上这些可积模型也符合 KMV 对称代数,具体检验的方法可以参考文献[24]. 例如,当取 $A=0$ 、 $B=1/4$ 和 $C=1/2$ 时,式(89)会拥有下列的 KMV 对称代数:

$$[\sigma(f_1), \sigma(f_2)] = \sigma(\dot{f}_1 f_2 - \dot{f}_2 f_1),$$

$$[\sigma(f), K(g)] = K(\frac{1}{3} \dot{f}g - g\dot{f}),$$

$$[\sigma(f), J(h)] = J(\frac{2}{3} \dot{f}h - h\dot{f}),$$

$$[\sigma(f), N(m)] = -N(\dot{f}m),$$

$$[M(l_1), M(l_2)] = M(\dot{l}_1 l_2 - \dot{l}_2 l_1),$$

$$[K(g), J(h)] = N(4\dot{g}h - 2h\dot{g}),$$

$$[L(k), M(l)] = L(\dot{k}l),$$

$$[J(h), M(l)] = [M(l), K(g)] =$$

$$[M(l), \sigma(f)] = [L(k), \sigma(f)] =$$

$$[L(k), K(g)] = [L(k), J(h)] =$$

$$[N(m_1), N(m_2)] = [J(h_1), J(h_2)] =$$

$$[K(g_1), K(g_2)] = [L(k_1), L(k_2)] =$$

$$[K(g), N(m)] = [J(h), N(m)] =$$

$$[M(l), N(m)] = [L(h), N(m)] = 0. \quad (90)$$

上式中的点表示对相应变量的求导,并且,

$$\sigma(f) = -f(t)\partial_t - \frac{2}{3}y\dot{f}\partial_y - \frac{1}{3}\dot{f}z\partial_z + \frac{4}{3}\ddot{f}yz\partial_u,$$

$$M(l) = -l(x)\partial_x,$$

$$N(m) = m(t)\partial_u,$$

$$L(k) = k(x)\partial_u,$$

$$J(h) = -h(t)\partial_y + 2h\dot{z}\partial_u,$$

$$K(g) = -g(t)\partial_z + 4g\dot{y}\partial_u. \quad (91)$$

确切地说,我们从代数式(7)的每一个表示出发,可以得到非常多的拥有 KMV 对称代数的(3+1)维可积模型,但这些模型的 Painlevé 性质和 Lax 对还有待进一步讨论.

4 从式(4)~(6)中构造的高阶模型

考虑一个自治的高阶 KP 方程族^[29]:

$$\left(u_t + \frac{3}{2}uu_x + u_{xxx}\right)_x + \frac{3}{4}\delta u_{yy} + F(u) = 0, \quad (92)$$

其中,

$$F(u) \equiv F(u, u_x, u_{xx}, \dots, u_{x^n y^m t^l}, \dots) \equiv F. \quad (93)$$

它的对称方程可以写为:

$$\left(\sigma_t + \frac{3}{2}\sigma u_x + \frac{3}{2}u\sigma_x + \sigma_{xxx}\right)_x + \frac{3}{4}\delta\sigma_{yy} + F'\sigma = 0, \quad (94)$$

其中, F' 是 F 关于任意 G 的线性化算子:

$$F'G = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \epsilon} F(u + \epsilon G). \quad (95)$$

对于 3 个生成元式(4)、式(5)和式(6),我们分别讨论它们所形成的新的可积模型.

4.1 式(4)所构造的模型

将式(4)代入到式(94),得到:

$$\left[f\partial_t + \frac{1}{3}f(x\partial_x + 2y\partial_y + 6) - \frac{2\delta}{9}y^2\ddot{f}\partial_x\right] \cdot \\ \left(u_{xt} + \frac{3}{2}uu_{xx} + \frac{3}{2}u_x^2 + u_{xxx} + \frac{3}{4}\delta u_{yy}\right) + \\ F'\left[fu_t + \frac{1}{3}\left(x\dot{f} - \frac{2\delta}{3}y^2\ddot{f}\right)u_x + \right. \\ \left. \frac{2}{3}\dot{f}(yu)_y - \frac{4}{27}\left(\frac{3}{2}x\ddot{f} - \delta y^2\ddot{f}\right)\right] = 0. \quad (96)$$

用式(92)消去式(96)中的 u_{xt} , 可以得到:

$$F' \left[fu_t + \frac{1}{3} \left(x\dot{f} - \frac{2\delta}{3} y^2 \ddot{f} \right) u_x + \frac{2}{3} \dot{f} (yu)_y - \frac{4}{27} \left(\frac{3}{2} x\ddot{f} - \delta y^2 \ddot{f} \right) \right] - \left[fF'u_t + \frac{1}{3} \dot{f} (xF'u_x + 2yF'u_y + 6F) - \frac{2\delta}{9} y^2 \ddot{f} F'u_x \right] = 0. \quad (97)$$

根据函数 F 的式(93)和线性化算符 F' 的式(95)定义, 我们有:

$$F' = \sum_{n,m,l} \frac{\partial F}{\partial u_{x^n y^m t^l}} \frac{\partial^{n+m+l}}{\partial x^n \partial y^m \partial t^l}, n, m, l \geq 0. \quad (98)$$

将式(98)代入到式(97)中可以得到:

$$\sum_{n,m,l} \sum_{i=0}^{l-1} C_l^i \frac{\partial F}{\partial u_{x^n y^m t^l}} \left[f^{(l-i)} \partial_t + \frac{f^{(l-i+1)}}{3} (x\partial_x + 2y\partial_y) - \frac{2\delta f^{(l-i+2)}}{9} y^2 \partial_x \right] u_{x^n y^m t^i} + \sum_{n,m,l} \sum_{i=0}^l C_l^i \frac{\partial F}{\partial u_{x^n y^m t^l}} \left[\frac{n}{3} f^{(l-i+1)} \partial_y^2 - \frac{2m\delta}{9} f^{(l-i+2)} (2y\partial_y + m-1) \partial_x + \frac{2}{3} (m+1) f^{(l-i+1)} \partial_y^2 \right] u_{x^n y^{m-2} t^i} - \sum_l \left[\frac{2}{9} f^{(l+2)} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{xt^l}} + x \frac{\partial F}{\partial u_{t^l}} \right) - \frac{4\delta}{27} f^{(l+3)} \right] \left(2 \frac{\partial F}{\partial u_{yyt^l}} + 2y \frac{\partial F}{\partial u_{yt^l}} + y^2 \frac{\partial F}{\partial u_{t^l}} \right) \right] = 2 \dot{f} F, \quad (99)$$

其中,

$$C_l^i \equiv \frac{l!}{i!(l-i)!}, u_{x^{-n} y^{-m} t^{-l}} = 0, m \geq 1, l \geq 1. \quad (100)$$

如果可以从式(99)找到一个独立于 f 的解 F , 那么就可以得到一个对任意函数 f 都有 Virasoro 对称的模型. 在关于 f 独立的要求和对于 F 的自洽条件下, 式(99)等价于如下系统:

$$\sum_{n,m,l} (n+3l+2m+2) u_{x^n y^m t^l} \frac{\partial F}{\partial u_{x^n y^m t^l}} = 6F, \quad (101)$$

$$\sum_{n,m,l} (l+1) \frac{\partial F}{\partial u_{x^n y^m t^{l+1}}} u_{x^{n+1} y^m t^l} - \frac{2}{3} \frac{\partial F}{\partial u} = 0, \quad (102)$$

$$\sum_{n,m,l} \frac{\partial F}{\partial u_{x^n y^m t^l}} \left(\frac{3}{2} \delta l \partial_y^2 - m \partial_x \partial_t \right) u_{x^n y^{m-1} t^{l-1}} = 0, \quad (103)$$

$$\sum_{n,m,l} \frac{\partial F}{\partial u_{x^n y^m t^l}} \left[l(3l+n+2m-4) \partial_y^2 - \frac{2m\delta}{3} \right]$$

$$(m-1) \partial_x \partial_t u_{x^n y^{m-2} t^{l-1}} - \frac{2}{3} \frac{\partial F}{\partial u_x} = 0, \quad (104)$$

$$\sum_{n,m,l} \frac{\partial F}{\partial u_{x^n y^m t^{l+2}}} u_{x^{n+1} y^m t^{l-k}} - \frac{2}{9} \frac{\partial F}{\partial u_t^{k+1}} = 0, \quad (105)$$

$$\frac{2}{3} \frac{\partial F}{\partial u_t^k} - \sum_{n,m,l} \frac{\partial F}{\partial u_{x^n y^m t^{l+1}}} C_l^{l-k} u_{x^{n+1} y^m t^{l-k}} = 0, \quad (106)$$

$$\frac{2}{3} \frac{\partial F}{\partial u_{yt^k}} + \sum_{n,m,l} \frac{\partial F}{\partial u_{x^n y^m t^{l+2}}} \left[\frac{3}{2} \delta C_l^{l-k} \partial_y^2 - m C_l^{l-k+1} \partial_x \partial_t \right] u_{x^{n+1} y^m t^{l-k}} = 0, \quad (107)$$

$$2 \frac{\partial F}{\partial u_{yyt^k}} - \frac{3}{2} \delta \frac{\partial F}{\partial u_{xt^{k+1}}} + \frac{3}{4} \sum_{n,m,l} \frac{\partial F}{\partial u_{x^n y^m t^{l+3}}} \{ 3\delta [3C_l^{l-k} + C_l^{l-k+1} (n+2m+2)] \partial_y^2 - 2m \cdot (m-1) C_l^{l-k+2} \partial_x \partial_t \} \times u_{x^{n+1} y^{m-2} t^{l-k+1}} = 0, \quad (108)$$

其中, 式(105)~(108)中的 $k=0, 1, 2, \dots$.

要解出式(101)~(108)全部方程的解仍然很困难. 但如果令函数 F 在 $l \geq 1$ 的情况下与 $u_{x^n y^m t^l}$ 无关, 那么式(101)~(108)可以约化成:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial u_y} = \frac{\partial F}{\partial u_{yy}} = 0, \quad (109)$$

$$\sum_{n,m} (n+2m+2) u_{x^n y^m} \frac{\partial F}{\partial u_{x^n y^m}} = 6F, \quad (110)$$

$$\sum_{n,m} m u_{x^{n+1} y^{m-1}} \frac{\partial F}{\partial u_{x^n y^m}} = 0, \quad (111)$$

$$\sum_{n,m} m(m-1) u_{x^{n+1} y^{m-2}} \frac{\partial F}{\partial u_{x^n y^m}} + \delta \frac{\partial F}{\partial u_x} = 0. \quad (112)$$

式(109)~(110)的一般形式解可以写为:

$$F = u_{xx}^{3/2} F_1(v_{nm}, n, m=0, 1, 2, \dots, \{n, m\} \neq \{0, 0\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}) \equiv u_{xx}^{3/2} F_1, \quad (113)$$

$$v_{nm} \equiv v_{n,m} \equiv u_{x^n y^m} u_{xx}^{\frac{n+2m+2}{4}}. \quad (114)$$

将式(113)和式(114)代入到式(111)和式(112),

有:

$$\sum_{n,m} m v_{n+1,m-1} \frac{\partial F_1}{\partial v_{nm}} = 0, \quad (115)$$

$$\sum_{n,m} m(m-1) v_{n+1,m-2} \frac{\partial F_1}{\partial v_{nm}} + \delta \frac{\partial F_1}{\partial v_{10}} = 0. \quad (116)$$

式(115)的一般解可以写为:

$$F_1 = f_2(y_{nm}, n, m=0, 1, 2, \dots, \{n, m\} \neq \{0, 0\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}) \equiv F_2, \quad (117)$$

$$y_{nm} \equiv y_{n,m} \equiv \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} C_m^k v_{n+m-k,k} v_{11}^{m-k} = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} C_m^k u_{x^{n+m-k} y_k} u_{xy}^{m-k} u_{xx}^{\frac{(4k-n-6m-2)}{4}}. \quad (118)$$

经过一系列冗长的计算,发现可将式(117)代入式(116)中,可得:

$$\sum_{n,m} m(m-1) y_{n+1,m-2} \frac{\partial F_2}{\partial y_{nm}} + \delta \frac{\partial F_2}{\partial y_{10}} = 0. \quad (119)$$

式(119)的一般解可以写为:

$$F_2 = F_0(K_{n,m}, m, n=0, 1, 2, \dots) \equiv F_0, \quad (120)$$

其中, F_0 是 K_{nm} 的任意函数, K_{nm} 可由下式决定:

$$K_{nm} = y_{nm} - \sum_{j=1}^{[m/2]} \frac{m!}{j!(m-2j)!} K_{n+j,m-2j} (\delta y_{10})^j. \quad (121)$$

其中, $\delta_{ii}=1, \delta_{ij}=0, i \neq j$.

$$K_{n0} = (1 - \delta_{n,0} - \delta_{n,1}) y_{n0} = (1 - \delta_{n,0} - \delta_{n,1}) u_{x^n} u_{xx}^{-(n+2)/4}, \quad (122)$$

$$K_{n1} = (1 - \delta_{n,0}) y_{n1} = (1 - \delta_{n,0}) \times (u_{x^n y} u_{xx} - u_{xy} u_{x^{n+1}}) u_{xx}^{-(n+8)/4}. \quad (123)$$

还有一些 K_{nm} 的具体例子, 如:

$$K_{n2} = (1 - \delta_{n,0}) (u_{x^n y^2} u_{xx}^2 - 2u_{x^{n+1} y} u_{xx} u_{xy} + u_{x^{n+2}} u_{xy}^2 - 2\delta u_{x^{n+1}} u_{xx} u_{xx}^2) u_{xx}^{-(n+14)/4}, \quad (124)$$

$$K_{n3} = (u_{x^n y^3} u_{xx}^3 - 3u_{x^{n+1} y^2} u_{xx}^2 u_{xy} + 3u_{x^{n+2} y} u_{xx} u_{xy}^2 - u_{x^{n+3}} u_{xy}^3) u_{xx}^{-(n+20)/4} - 6\delta u_x (u_{x^{n+1} y} u_{xx} - u_{x^{n+2}} u_{xy}) u_{xx}^{-(n+12)/4}, \quad (125)$$

$$K_{n4} = (u_{x^n y^4} u_{xx}^4 - 4u_{x^{n+1} y^3} u_{xx}^3 u_{xy} + 6u_{x^{n+2} y^2} u_{xx}^2 u_{xy}^2 - 4u_{x^{n+3} y} u_{xy}^3 u_{xx} + u_{x^{n+4}} u_{xy}^4) u_{xx}^{-(n+26)/4} - 6\delta u_x \cdot u_{xx}^{-(n+18)/4} (u_{x^{n+1} y^2} u_{xx}^2 - 2u_{x^{n+2} y} u_{xx} u_{xy} + u_{x^{n+3}} u_{xy}^2) + 12u_{x^{n+2}} u_{xx}^2 u_{xx}^{-(n+10)/4}. \quad (126)$$

总体来说, 含有 $K_{n,m}$ 的任意函数方程:

$$\left(u_t + \frac{3}{2} uu_x + u_{xxx} \right)_x + \frac{3}{4} \delta u_{yy} + u_{xx}^{\frac{3}{2}} F_0(K_{n,m}, m, n=0, 1, 2, \dots) = 0, \quad (127)$$

拥有共同的 Virasoro 对称代数式(7).

4.2 式(5)所构造的模型

将式(5)代入到式(94)中, 可得:

$$h \left(u_{xt} + \frac{3}{2} uu_{xx} + \frac{3}{2} u_x^2 + u_{xxxx} + \frac{3}{4} \delta u_{yy} \right)_x + F' \left(hu_x - \frac{2}{3} \dot{h} \right) = 0. \quad (128)$$

由式(92)消去式(128)中的 u_{xt} , 则为:

$$F' \left(hu_x - \frac{2}{3} \dot{h} \right) - h F' u_x = 0. \quad (129)$$

将式(98)代入到式(129), 有:

$$\sum_{n,m,l'} \sum_{i=0}^{l'-1} C_{l'}^i h^{(l'-i)} \frac{\partial F}{\partial u_{x^{n+1} y^{m_l'} t^{l'}}} u_{x^{n+1} y^{m_l'} t^{l'}} - \frac{2}{3} \sum_l h^{(l+1)} \frac{\partial F}{\partial u_{t^l}} = 0, l' \geq 1. \quad (130)$$

如果可从式(130)中找到一个与 h 无关的解 F , 那么就可以得到一个对任意的 h 都有对称形式为式(5)的模型.

找到式(130)所有与 h 无关的解, 等同于解出下列具有无穷多独立变量的无穷多个线性系统:

$$\sum_{n,m,l} C_l^{l-k-1} \frac{\partial F}{\partial u_{x^n y^{m_l} t^{l-k-1}}} u_{x^{n+1} y^{m_l} t^{l-k-1}} - \frac{2}{3} \frac{\partial F}{\partial u_t^k} = 0, \quad k=0, 1, 2, \dots, \infty. \quad (131)$$

找到超定系统(131)的一般解很难, 但如果要求 F 与 $u_{x^n y^{m_l} t^l} (l \geq 1)$ 无关, 那么就可以得到式(131)的一般解:

$$F = f_1 \equiv f_1(u_{x^n y^m}, n, m=0, 1, 2, \dots, n^2 + m^2 \neq 0). \quad (132)$$

显然, 式(127)所展示的

$$F = u_{xx}^{3/2} F_0(K_{n,m}, n, m=0, 1, 2, \dots) \quad (133)$$

只是式(132)中 f_1 的一个特殊例子.

4.3 式(6)所构造的模型

将式(6)代入到式(94), 可得:

$$\left(-2g \partial_y + \frac{4}{3} \delta y \dot{g} \partial_x \right) \left(u_{xt} + \frac{3}{2} uu_{xx} + \frac{3}{2} u_x^2 + u_{xxxx} + \frac{3}{4} \delta u_{yy} \right) + F' \left(-2gu_y + \frac{4}{3} \delta \dot{g} y u_x - \frac{8}{9} \delta y \ddot{g} \right) = 0, \quad (134)$$

将式(92)消去式(134)中的 u_{xt} , 可得:

$$2g F' u_y - \frac{4}{3} \delta y \dot{g} F' u_x + F' (-2gu_y + \frac{4}{3} \delta \dot{g} y u_x - \frac{8}{9} \delta y \ddot{g}) = 0. \quad (135)$$

将式(98)代入式(135), 可得:

$$\frac{4}{3} \delta \sum_{n,m,l} \sum_{i=0}^l C_l^i g^{(l-i+1)} \frac{\partial F}{\partial u_{x^n y^{m_l} t^l}} u_{x^{n+1} y^{m_l} t^l} -$$

$$\begin{aligned} & \frac{8}{9} \delta \sum_l g^{(l+2)} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{y^l}} + y \frac{\partial F}{\partial u_t^l} \right) + \\ & \sum_{n,m,l'} \sum_{i=0}^{l'-1} C_{l'}^i \frac{\partial F}{\partial u_{x^n y^m t^{l'}}} \left(-2g^{(l'-i)} \partial_y + \right. \\ & \left. \frac{4}{3} \delta g^{(l'-i+1)} \partial_x \right) u_{x^n y^m t^i} = 0. \end{aligned} \quad (136)$$

如果可以找到式(136)中独立于 g 的解 F , 那么就可以得到一个对于任意函数 g 都有式(6)对称形式的模型.

找到式(136)的所有与 g 无关的解, 等同于求解下列系统:

$$\begin{aligned} & \sum_{n,m,l} m C_l^{l-k-1} \frac{\partial F}{\partial u_{x^n y^m t^l}} u_{x^{n+1} y^{m-1} t^{l-k-1}} - \frac{2}{3} \frac{\partial F}{\partial u_{t^k}} = 0, \quad (137) \\ & \sum_{n,m,l} \frac{\partial F}{\partial u_{x^n y^m t^l}} \left[\left(m C_l^{l-k-1} \partial_x \partial_t - \frac{3}{2} \delta C_l^{l-k-2} \partial_y^2 \right) \right. \\ & \left. u_{x^n y^{m-1} t^{l-k-2}} \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial F}{\partial u_{y^k}} = 0. \end{aligned} \quad (138)$$

找到式(137)和(138)的解非常困难. 但如果要求 F 与 $u_{x^n y^m t^l}$ ($l \neq 0$) 无关, 那么上面2个算式可以约化成:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u_y} = 0, \quad (139)$$

这意味着,

$$F = f_2 \equiv f_2(u_{x^n y^m}, \{n, m\} \neq \{0, 0\}, \{0, 1\}), \quad (140)$$

其中, f_2 是指标上的变量的任意函数.

显然, 式(140)是式(132)的一个特殊例子, 而 $F = u_{xx}^{3/2} F_0(K_{n,m}, m, n = 0, 1, 2, \dots)$ 是式(140)的一个特殊例子. 换句话说, 广义 KP 方程族(127)不仅拥有 Virasoro 对称代数式(7), 还拥有全 Kac-Moody-Virasoro (KMV)对称代数式(7)~(12).

5 总结

文中以 Kac-Moody-Virasoro 型代数为基础, 从中推导出一系列具有这个代数性质的可积模型. 不仅可以从 Virasoro 代数出发, 推导出大家熟知的(2+1)维非线性可积模型——KP 方程以及从 KP 方程出发得到的一些高阶的(2+1)维可积模型, 还可以通过同样办法推导(3+1)维的可积模型. 由于这些可积模型都具有 KMV 代数性质, 所以称它们为 Kac-Moody-Virasoro 可积系统. 而一般的科学研究

都来自于(2+1)维或更高维的系统, 所以相信这个推导高维可积模型的方法以及这个方法产生出来的可积模型对于其他领域的研究有着至关重要的作用.

参考文献:

- [1] Lie S. Book review: Vorlesungen über differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen transformationen[J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1898, 4(4):155-168.
- [2] Lie S. Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Classe linearer partieller differentialgleichungen[J]. Archiv Der Mathematik, 1881, 6(3):42-53.
- [3] Gu C H. Integrable evolution systems based on generalized self-dual Yang-Mills equations and their soliton-like solutions[J]. Letters in Mathematical Physics, 1995, 35(1):61-74.
- [4] Gu C H, Zhou Z X. On Darboux transformations for soliton equations in high-dimensional spacetime[J]. Letters in Mathematical Physics, 1994, 32(1):1-10.
- [5] Winternitz P. Lie groups and solutions of nonlinear partial differential equations[M]//Integrable Systems, Quantum Groups, and Quantum Field Theories. Dordrecht: Springer Netherlands, 1993:429-495.
- [6] Lou S Y. Symmetries and algebras of the integrable dispersive long wave equations in (2+1)-dimensional spaces[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1994, 27(9):3235-3243.
- [7] Lou S Y, Qian X M. Generalized symmetries and algebras of the two-dimensional differential-difference Toda equation[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1994, 27(17):L641-L644.
- [8] Ruan H Y, Chen Y X. Symmetries and dromion solution of (2+1)-dimensional nonlinear Schrödinger equation[J]. Acta Physica Sinica, 1999, 8(4):241-251.
- [9] Lou S Y. Searching for higher dimensional integrable models from lower ones via Painlevé analysis[J]. Physical Review Letters, 1998, 80(23):5027.
- [10] Lou S Y, Xu J J. Higher dimensional Painlevé integrable models from the Kadomtsev-Petviashvili equation[J]. Journal of Mathematical Physics, 1998, 39(10):5364-5376.
- [11] Lou S Y. Conformal invariant Painlevé expansions and higher dimensional integrable models[J]. Science in China Series A: Mathematics, 1999, 42(5):537-545.
- [12] 楼森岳. 共形不变的 Painlevé 分析法和高维可积模型

- [J]. 中国科学: A 辑, 1999, 29(2):177-185.
- [13] Lou S Y. Deformations of the Riccati equation by using Miura-type transformations[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1997, 30(20):7259-7267.
- [14] Lou S Y, Yu J, Tang X Y. Higher dimensional integrable models from lower ones via Miura type deformation relation[J]. Zeitschrift Für Naturforschung A, 2000, 55 (11/12):867-876.
- [15] Lou S Y. Deforming the lower-dimensional solitons to higher-dimensional ones[J]. Communications in Theoretical Physics, 2000, 34(4):649-654.
- [16] 楼森岳. 利用 Miura 型不可逆变换得到高维可积模型[J]. 物理学报, 2000, 49(9):1657-1662.
- [17] Yu J, Lou S Y. Deformation and (3+1)-dimensional integrable model[J]. Science in China Series A: Mathematics, 2000, 43(6):655-660.
- [18] 俞军, 楼森岳. 形变与 3+1 维可积模型[J]. 中国科学: A 辑, 2000, 30(4):347-351.
- [19] Lin J, Qian X M. High-dimensional integrable models with conformal invariance[J]. Communications in Theoretical Physics, 2003, 40(3):259-261.
- [20] David D, Kamran N, Levi D, et al. Symmetry reduction for the Kadomtsev-Petviashvili equation using a loop algebra[J]. Journal of Mathematical Physics, 1986, 27(5): 1225-1237.
- [21] Tamizhmani K M, Ramani A, Grammaticos B. Lie symmetries of Hirota's bilinear equations[J]. Journal of Mathematical Physics, 1991, 32(10):2635-2659.
- [22] Champagne B, Winternitz P. On the infinite-dimensional symmetry group of the Davey-Stewartson equations[J]. Journal of Mathematical Physics, 1988, 29(1):1-8.
- [23] Omote M. Infinite-dimensional symmetry algebras and an infinite number of conserved quantities of the (2+1)-dimensional Davey-Stewartson equation[J]. Journal of Mathematical Physics, 1988, 29(12):2599-2603.
- [24] Lou S Y, Hu X B. Infinitely many symmetries of the Davey-Stewartson equation[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1994, 27(7):L207-L212.
- [25] Davey A, Stewartson K. On three-dimensional packets of surface waves[J]. Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences, 1974, 338(1613):101-110.
- [26] Champagne B, Winternitz P. On the infinite-dimensional symmetry group of the Davey-Stewartson equations[J]. Journal of Mathematical Physics, 1988, 29(1):1-8.
- [27] Lou S Y, Yu J, Weng J P, et al. Symmetry structure of (2+1) dimensional bilinear Sawada-Kotera equation[J]. Acta Physica Sinica, 1994, 43(7):1050-1055.
- [28] Lou S Y, Yu J, Lin J. (2+1)-dimensional models with Virasoro-type symmetry algebra[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1995, 28(6):L191-L196.
- [29] Lou S Y, Tang X Y. Equations of arbitrary order invariant under the Kadomtsev-Petviashvili symmetry group[J]. Journal of Mathematical Physics, 2004, 45(3):1020-1030.

Kac-Moody-Virasoro integrable system

ZHAO Qiliang^{1,2}, JIA Man^{1,2}, LOU Senyue^{1,2*}

(1.School of Physical Science and Technology, Ningbo University, Ningbo 315211, China;

2.Laboratory of Clean Energy Storage and Conversion, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: By studying the symmetry of Kadomtse-Petviashvilli (KP) equation, we obtain the infinite-dimensional Lie algebra of symmetries, which is termed as Kac-Moody-Virasoro (KMV) algebra. Using generators of KMV algebra and the prolongation of Virasoro algebra, the Kadomtse-Petviashvilli (KP) equation is obtained. In addition, the other higher order (2+1)-dimensional and (3+1)-dimensional integrable model can thus be derived from KP equation. It is worth noting that all the models possess the same properties of KMV algebra.

Key words: Lie group of symmetries; Lie algebra; Kac-Moody-Virasoro algebra; KP equations; CK direct method; integrability

(责任编辑 章践立)