

基于扩展主对称方法的 Kadomtsev-Petviashvili 方程的对称与无穷维李代数

樊 荣, 李 彪*

(宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 提出了扩展的主对称方法, 将它应用于 2+1 维可积模型——Kadomtsev-Petviashvili (KP) 方程, 获得了该方程中含有时间 t 的任意函数的广义对称, 无需使用复杂的递归算子, 即可直接从对称定义方程中得出关于 KP 方程对称的显式简单构造公式. 本文中所有提到的对称都是此方程对称的特例, 同时, 还给出了由这些对称构成的一般无穷维李代数.

关键词: 对称; 李代数; 显式表达式

中图分类号: O175.2

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2020) 05-0093-06

在 20 世纪 60 年代到 80 年代, 某些具有物理应用的 1+1 维非线性发展方程孤子解的发现引起了诸多物理学家和数学家的极大兴趣与关注^[1]. 一个重要的发展是非线性模型(例如 KdV 和 Liouville 方程)通常具有无穷多个对称^[2-11], 并且有许多不同类型的有效方法来获取这种发展方程的对称, 其中之一是利用主对称的李代数来获得所有的交换对称.

20 世纪 80 年代, Fuchssteiner 利用主对称方法不仅获得了 Kadomtsev-Petviashvili (KP) 方程中与时间无关的对称, 也获得了与时间有关的对称^[12]. 20 世纪 90 年代, 楼森岳教授课题组改进了文献^[12]中的主对称方法, 并把改进方法应用于一系列非线性方程, 给出由广义对称构造的所研究方程的更一般对称和无穷维李代数^[13-20], 本文将以 KP 方程为例来说明这一改进的方法. 文中第 2 部分则致力于提出第 1 部分中获得的所有对称的显式表达式, 第 3 部分为总结和讨论.

1 KP 方程的对称与李代数

Fuchssteiner 指出^[12]:

$$G_3 \equiv y^2 \quad (1)$$

是 KP 方程:

$$u_{xt} = (6uu_x - u_{xxx})_x - 3u_{yy} \equiv K_{2x} \quad (2)$$

的三阶主对称.

由于

$$\begin{aligned} &[[[G_3, K_2], K_2], K_2] = [[G_2, K_2], K_2] = \\ &[G_1, K_2] = 108K_2, \end{aligned} \quad (3)$$

此时, 定义交换 $[A, B]$ 为:

$$\begin{aligned} [A, B] &= \frac{\partial}{\partial x} [A(u + \varepsilon B(u)) - \\ &B(u + \varepsilon A(u))] \Big|_{\varepsilon=0} = A'B - B'A. \end{aligned} \quad (4)$$

K_2 被定义为:

$$K_2 = D_x^{-1} K_{2x} = 6uu_x - u_{xxx} - 3D_x^{-1} u_{yy}, \quad (5)$$

其中,

$$D_x^{-1} = \int_{-\infty}^x dx, \quad (6)$$

是微分算子 $D_x = \partial / \partial x$ 的逆元. Fuchssteiner 利用常数 C , 通过

$$D_x^{-1} C = xC, \quad (7)$$

来定义 D_x^{-1} 的李代数含义. 然而, 为了获得最一般的结果, 我们应该将 D_x^{-1} 定义为如下更一般的形式:

$$D_x^{-1} C = xC + f(y, t), \quad (8)$$

其中, f 是关于 y 和 t 的任意函数.

现在, 用文献[12]中已给的种子对称 K_2 和主对称 $G_3 = y^2$ 来计算方程, 并且用式(8)中对 D_x^{-1} 的定义来代替式(7). 显式计算结果为:

$$\begin{aligned} G_2 &= [G_3, K_2] = -6u_x y^2 + 6x + f(y, t), \\ G_1 &= [G_2, K_2] = -36(xu_x + 2u + 2yu_y) - \\ &\quad 6fu_x + 3f_{yy}x + f_1(y, t). \end{aligned} \quad (9)$$

最后, 可以得到:

$$\begin{aligned} [G_1, K_2] &= 108K_2 - 6f_1u_x + f_2(y, t) - \\ &\quad 18(f_{yy}xu_x + 2f_yu_y + 2f_{yy}u) + \\ &\quad \frac{9}{2}f_{yyy}x^2 + 3f_{1yy}x = 108K_2 + \sigma_0, \end{aligned} \quad (10)$$

其中, f 、 f_1 和 f_2 是 3 个积分函数. 这 3 个积分函数从 KP 方程的对称定义方程中加以固定, 使得当 D_x^{-1} 以式(8)的形式出现时, y^2 仍是三阶主对称. KP 方程的对称定义为:

$$\sigma_{xt} = [(6D_x^2u - D_x^4) - D_y^2]\sigma = K'_{2x}\sigma, \quad (11)$$

或等价地为:

$$\sigma_t = D_t\sigma = K'_2\sigma = (6D_xu - D_x^3 - D_x^{-1}D_y^2)\sigma, \quad (12)$$

其中, D_t 表示 t 的全导数.

将式(10)给出的 σ_0 代入式(11)中, 可以得到第一个广义种子对称:

$$K_0(h) = h(t)u_x + \frac{1}{6}h'(t). \quad (13)$$

并且, $f_{1y} = f = f_{2y} = 0$, $h = -6f_1(t)$, $f_2 = h'/6 = D_t h/6$, h 是一个关于 t 的任意函数. 当 $h=1$ 时, 对应于 x 的平移, $K_0(h)$ 约化为已知的 $K_0(1) = K_0 = u_x$. 现在使用文献[12]中已知的对称 $K_3 = 4[4uu_y + 2u_x D_x^{-1}u_y - D_x^{-2}u_{yyy} - u_{xyy}]$ 和广义种子对称式(13), 将积分函数固定为 $h''y/18$, 使得 $K_1(h)$ 满足式(11). 因此可以得到:

$$\begin{aligned} K_1(h) &= \frac{3}{4}[K_0(f), K_3] = -2hu_y + \\ &\quad \frac{1}{3}h'yu_x + \frac{1}{18}h''y, \end{aligned} \quad (14)$$

其中, $h = f'$, 并且 $K_1(h)$ 是关于 y 平移不变性 $K_1(1) = K_1 = -2U_y$ 的推广.

类似地, 我们可以得到:

$$\begin{aligned} K_2(h) &= \frac{3}{4}[K_1(f), K_3] = -hu_t - \\ &\quad \frac{2}{3}h'yu_y - \frac{1}{3}h'xu_x + \frac{1}{18}h'y^2u_x - \frac{2}{3}h'u - \\ &\quad \frac{1}{18}h''x + \frac{1}{108}h'''y^2, (h = f'), \end{aligned} \quad (15)$$

以及

$$\begin{aligned} K_3(h) &= \frac{3}{4}[K_2(f), K_3] = hK_3 + \frac{1}{3}h'(yu_{xxx} + \\ &\quad 2xu_y + 4D_x^{-1}u_y + 3yD_x^{-1}u_{yy} - 6yu_y) - \\ &\quad \frac{1}{9}h''(xyu_x + 2yu + y^2u_y) - \\ &\quad \frac{1}{162}h'''(3xy - y^3u_y) + \\ &\quad \frac{1}{972}h^{(4)}y^3, (h = f'). \end{aligned} \quad (16)$$

由此可见, $K_2(h)$ 是关于 t 平移不变性 $K_2(1) = K_2 = -u_t$ 的推广, 而 $K_3(h)$ 是已知的与时间无关对称的 $K_3(1) = K_3$ 推广.

最后, 借助文献[12]中已知的时间无关对称 K_n 和广义对称 $K_2(h)$ 或 $K_3(h)$, 可以获得关于 K_n 的所有推广:

$$K_n(h) = \frac{3}{n+1}[K_2(f), K_n], (h = f'), \quad (17)$$

$$K_n(h) = \frac{3}{n}[K_3(f), K_{n-1}], (h = f'). \quad (18)$$

需值得注意的是, 对于广义对称 $K_3(h)$ 而言, 当我们取 $h=t$ 时, $K_3(h)$ 约化为已知的时间相关(与时间 t 线性相关)对称:

$$\begin{aligned} K_3(t) &= tK_3 + \frac{1}{3}(yu_{xxx} + 2xu_y + 4D_x^{-1}u_y + \\ &\quad 3yD_x^{-1}u_{yy} - 6yu_x) \equiv tK_3 + \tau_{1,3}, \end{aligned} \quad (19)$$

其中, $\tau_{1,3}$ 只是参考文献[12]中给出的主对称(直到一个常数因子). 然后, 式(18)将约化为已知结果:

$$K_n(1) = K_n = \frac{3}{n}[K_3(t), K_{n-1}] = \frac{3}{n}[\tau_{1,3}, K_{n-1}]. \quad (20)$$

完成详细的计算后, 可以发现这里获得的广义对称还构成了一个封闭的无穷维李代数:

$$\begin{aligned} [K_n(h_1), K_m(h_2)] &= \\ &\quad \frac{1}{3}K_{n+m-2}((m+1)h_1h_2 - (n+1)h_2h_1). \end{aligned} \quad (21)$$

为验证其正确性, 我们将提出上述无穷维李代数(21)式的一些特殊情况, 以代替繁琐的证明过程.

(1) $h=1$. 此特殊情况中, 所有 $K_n(h)$ 都约化为文献[21]中已知的对称 $K_n = K_n(1)$, 这些对称能够从不显式依赖于变量 x 、 y 和 t 的守恒量导出^[22-23]. 所有这些守恒量是可交换的.

(2) $h=t$. 在这种情况下, 所有的对称 $K_n(t) =$

τ_n 就是显式依赖于变量 x 、 y 和 t 的所谓的“新对称”或“ τ 对称”. 所有这些类型的对称构成一个 Virasoro 代数:

$$[K_n(t), K_m(t)] = [\tau_n, \tau_m] = \frac{1}{3}(m-n)\tau_{n+m-2}, (n, m > 0). \quad (22)$$

(3) $h = t^m (m \geq 1)$. 这种类型的解在文献[12, 24-26]中已经给出, 代数式(21)约化为:

$$[K_n(t^r), K_m(t^s)] = \frac{1}{3}[r(m+1) - s(n+1)]K_{n+m-2}t^{r+s-1}, \quad (23)$$

并且此约化也在文献[25-26]中已经给出. 事实上, 将式(23)扩展到式(21)是很自然的. 如果将 $h(t)$ 限制为任何解析函数, 然后以泰勒级数形式加以表达, 再加上 KP 方程的对称定义方程式(11)是线性的, 因此, 根据式(23)可以证明式(21).

(4) 设

$$K_0(h) \equiv Z(h) = hu_x + \frac{1}{6}h', \quad (24)$$

$$K_1(g) \equiv Y(g) = -2gu_y + \frac{1}{3}g'yu + \frac{1}{18}g''y, \quad (25)$$

以及

$$K_2(f) \equiv X(f) = -fu_t - \frac{2}{3}f'yu_y - \frac{1}{3}f'xu_x + \frac{1}{18}f''y^2u_y - \frac{2}{3}f'u - \frac{1}{18}f''x + \frac{1}{108}f''y^2, \quad (26)$$

其中, h 、 g 和 f 是 3 个关于 t 的任意函数. 从代数式(21)中可得到 KP 方程的无穷维子代数:

$$[Z(h_1), Z(h_2)] = 0, \quad (27)$$

$$[Z(h), Y(g)] = 0, \quad (28)$$

$$[Y(g_1), Y(g_2)] = \frac{2}{3}Z(g_1'g_2 - g_2'g_1), \quad (29)$$

$$[Y(g), X(f)] = \frac{1}{3}Y(3g'f - 2fg'), \quad (30)$$

$$[Z(h), X(f)] = \frac{1}{3}Z(3h'f - 2fh), \quad (31)$$

$$[X(f_1), X(f_2)] = X(f_1'f_2 - f_2'f_1), \quad (32)$$

这些子代数首先由 Schwarz 使用的 REDUCE 软件包中已给出^[27], 其中, $X(f)$ 、 $Y(g)$ 和 $Z(h)$ 可表示为以下完全等价的形式:

$$Z(h) = h(t)\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{6}h'\frac{\partial}{\partial u}, \quad (33)$$

$$Y(g) = 2g(t)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{3}g'y\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{18}g''y\frac{\partial}{\partial u}, \quad (34)$$

$$X(f) = -f(t)\frac{\partial}{\partial t} - \frac{2}{3}f'y\frac{\partial}{\partial y} - \left(\frac{1}{3}f'x - \frac{1}{18}f''y^2\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{2}{3}f'u + \frac{1}{18}f'x - \frac{1}{108}f''y^2\right)\frac{\partial}{\partial u}. \quad (35)$$

相应的李乘积记为:

$$[A, B] = AB - BA. \quad (36)$$

文献[28]已经研究了该代数更多详细的内容, 同时, 也使用该子代数获得了 KP 方程的 3 种一般形式的相似解.

因为在每个高阶对称中都包含应该被固定的积分函数, 所以从式(17)或(18)中得到 $K_n(h)$ 的具体形式仍然非常困难, 并且对于积分函数尤其如此. 尽管积分函数与文献[16]得到的函数一致, 但它们必须直接从定义式(11)予以确定. 因此, 本文将给出一个简单且显式的公式来获得 $K_n(h)$.

2 KP 方程对称的构造公式

观察式(17)与(11)(或式(18)与(12)), 可知式(11)与 σ 线性相关, 式(17)与 $h = f'$ 线性相关, 并且 h 是关于 t 的任意函数, 因此 $K_n(h)$ 与 h (及其导数)的关系必须是线性的. 相应地, 我们知道 $K_n(h)$ 只能具有如下形式:

$$K_n(h) = \sum_{k=0}^{n+1} h^{(n+1-k)} K_n[k], \quad (37)$$

其中, $h^{(k)} = (D_t^k h(t))$, $K_n[k] (k=0, 1, \dots, n+1)$ 是关于 x 、 y 、 u 及其导数的函数, 且此函数没有明显的时间相关, 而 $K_n(h)$ 的显式时间相关已经在 $h^{(n+1-k)}$ 中分离出来.

将式(37)直接代入定义式(11)的左侧, 可以得到:

$$K_{nxt}(k) = \sum_{k=0}^{n+1} k^{(n+2-k)} K_{nx}[k] + \sum_{k=0}^{n+1} k^{(n+1-k)} K_{nxt}[k] = \sum_{k=0}^{n+1} k^{(n+2-k)} K_n[k] + \sum_{k=0}^{n+2} k^{(n+2-k)} K_{nxt}[k-1], \quad (38)$$

此时, 式(11)的右侧变为:

$$K'_{2x} K_n(h) = K'_{2x} \sum_{k=0}^{n+1} h^{(n+1-k)} K_n[k] = \sum_{k=1}^{n+2} h^{(n+2-k)} K'_{2x} K_n[k-1]. \quad (39)$$

因为 h 是一个关于 t 的任意函数, 比较式(38)

和(39)中 $h^{(n+2-k)}$ 的系数, 可以推导出:

$$K_{nx}[0] = 0. \quad (40)$$

当 $k=0$ 时,

$$K_n[0] = g_n(y). \quad (41)$$

它不仅与时间 t 无关, 而且与 x 和 u 也无关.

当 $k=1, 2, \dots, n+1$ 时,

$$K_{nx}[k] + K_{nxt}[k-1] = K'_{2x} K_n[k-1], \quad (42)$$

$$K_{nx}[k] = (K'_{2x} - D_x D_t) K_n[k-1]. \quad (43)$$

递归求解方程式(43), 得到:

$$\begin{aligned} K_n[k] &= D_x^{-1} (K'_{2x} - D_x D_t) K_n[k-1] = \\ &= (K'_2 - D_t) K_n[k-1] = \\ &= (K'_2 - D_t)^2 K_n[k-2] = \\ &\dots \\ &= (K'_2 - D_t)^k K_n[0] = \\ &= (K'_2 - D_t)^k g_n(y). \end{aligned} \quad (44)$$

当 $k=n+2$ 时, 条件

$$K_{nxt}[n+1] = K'_{2x} K_n[n+1], \quad (45)$$

意味着 $K_n[n+1]$ 本身是与时间无关的对称.

将

$$K_n[n+1] = (K'_2 - D_t)^{n+1} g_n(y) \quad (46)$$

替换至式(45)中, 以便确定唯一未知数 $g_n(y)$. 但是, 由于从式(23)的讨论中知道存在该问题的解, 并且该解只能为式(37), 因此拟以一种简单的方式来改进 $g_n(y)$.

如果 x 的维数为 $[x]$, 那么根据 KP 方程(2), 可以得到 y, t 和 u 的维数分别为 $[x]^2$ 、 $[x]^3$ 和 $[x]^{-2}$. 根据等式(13)~(18), 可以看出 $K_n(h)/h$ 的维数必须是 $[x]^{-n-3}$, 即 $h^{(n+1)} g_n(y)/h$ 必须有维数 $[x]^{-n-3}$. 因此, $g_n(y)$ 唯一可能的形式是

$$g_n(y) = A_n y^n, \quad (47)$$

其中, A_n 是一个常数. 因为对称方程(11)是线性的, 因此 A_n 也不是很重要.

最后, 可以得到关于 $K_n(h)$ 的构造方程:

$$K_n(h) = \frac{1}{2n!3^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} h^{(n+1-k)} (K'_2 - D_t)^k y^n, \quad (48)$$

其中, 常数 A_n 已固定为 $1/(2n!3^{n+1})$, 使得由式(48)给出的 $K_n(h)$ 与由式(18)得出的 $K_n(h)$ 相同.

从一般的对称表达式(48)开始, 我们不仅可以获得交换对称的显式表达式:

$$K_n = K_n[n+1] = \frac{1}{2n!3^{n+1}} (K'_2 - D_t)^{n+1} y^n, \quad (49)$$

还可以获得与时间无关的 k 阶主对称的显式表达式:

$$\tau_{k,n} = \frac{1}{2n!3^{n+1}} (K'_2 - D_t)^{n+1-k} y^n. \quad (50)$$

通过式(50), KP 方程的一般时间相关对称

$K_n(h)$ 可以写成:

$$K_n(h) = \sum_{k=0}^{n+1} h^k \tau_{k,n}, \quad (51)$$

其中, $\tau_{0,n} = K_n$.

具体计算中发现, 如果令 $K_n(h)$ 为式(48), 就可以使用 D_x^{-1} 的定义方程式(7)进行计算. 实际上, 由于已经固定了所有 $n \geq 0$ 的 $K_n(0)$, 因此, 式(17)和(18)中的积分函数也已经被固定.

3 总结与讨论

本文在扩展了文献[12]中针对 KP 方程的主对称方法后, 得到了无穷多个与时间有关的对称, 其中每个高阶对称都包含 t 的任意函数. 所有已提到的对称都可视为特殊情况. 尽管可以借助于 2 个递归算子^[29-30], 以 2 种不同方式递归地获得与时间无关的对称, 但是这些交换对称的表达式仍然相当复杂. 对于含有关于 t 任意函数的广义时间相关对称, 我们给出了一个显式简单表达式, 从该表达式可以获得阶数为 $k(k=1, 2, \dots, n+1)$ 的时间相关对称和主对称.

这些无穷多个对称共同构成了无穷维李代数. Schwartz^[27]获得并由 David 等^[28]讨论的含有关于 t 的 3 个任意函数的无穷维李代数, 只是这里给出的一个子代数. 因为高阶对称中的所有函数都可以彼此独立, 所以由无穷多个广义对称组成的代数包括无穷多个关于 t 的任意函数. David 等^[28]使用含有关于 t 的 3 个任意函数的子代数, 获得了包含这 3 个任意函数的 KP 方程的 3 种解. 实际上, KP 方程存在很多种解^[31-33], 并且这些解都包含 3 个以上关于 t 的任意函数. 此外, 对于 KP 方程的对称群存在关于 t 的无穷多个任意函数这一事实, 意味着可能存在一些包含关于 t 的无穷多个任意函数的解; 而如何使用 KP 方程的广义对称群以获得此类解, 还值得进一步研究. 值得说明的是, 可以用以下广义等价形式写出 KP 方程(2):

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx} - 3D_x^{-1}u_{yy} + f(y, t), \quad (52)$$

其中, $f(y, t)$ 是一个关于 y 和 t 的任意函数. 显然, 2 个变量的任意函数可以写成一个包含其中一个变量的无穷多个任意函数的函数. 例如变量 y 和 t 可以写成函数:

$$f(y, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n(t) y^n, \quad (53)$$

其中, $A_n(t) (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 是关于变量 t 的任意函数.

在文献[11]中, 已经获得了由各类 1+1 维可积模型时间相关对称构成的完整 Virasoro 代数. 但是, 因为方程式(22)仅在 $n, m=0, 1, 2, \dots$ 时成立, 所以我们得到 KP 方程的 Virasoro 代数是不完整的. 如何为 $\tau_n (n=-1, -2, \dots)$ 查找另一个“半”等级, 甚至是否存在这样的否定等级仍然未知. 关于 KP 方程的对称和对称代数的其他各种问题, 如守恒定律也值得进一步研究. 与 KP 方程相似, 对于其他 2+1 维可积模型, 可能存在广义对称和无限维李代数. 例如, 文献[31]报道了在 2 个空间中可积色散长波方程的广义对称和无限维李代数.

此外, 本文扩展的主对称方法可应用到其他的非线性可积系统, 如三维 Toda 方程、势 Nizhnik-Novikov-Veselov 方程、(2+1)维可积色散长波方程、Davey-Stewartson 方程、两维微分差分 Toda 方程、双线性 KP 方程、(2+1)维 KdV-Ito 方程等.

参考文献:

- [1] Miura R M, Gardner C S, Kruskal M D. Korteweg-de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion[J]. Journal of Mathematical Physics, 1968, 9(8):1204-1209.
- [2] Olver P J. Evolution equations possessing infinitely many symmetries[J]. Journal of Mathematical Physics, 1977, 18(6):1212-1215.
- [3] Olver P J. On the Hamiltonian structure of evolution equations[J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1980, 88(1):71-88.
- [4] Olver P J. Canonical forms and integrability of bi-Hamiltonian systems[J]. Physics Letters A, 1990, 148(3/4):177-187.
- [5] Olver P J. Applications of Lie Groups to Differential Equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1986.
- [6] Kumei M, Bluman, G. W, Kumei, S. Symmetries and Differential Equations[M]. Berlin: Springer Verlag, 1989.
- [7] Fuchssteiner B. The Lie algebra structure of nonlinear evolution equations admitting infinite dimensional Abelian symmetry groups[J]. Progress of Theoretical Physics, 1981, 65(3):861-876.
- [8] Fokas A S, Fuchssteiner B. The hierarchy of the Benjamin-Ono equation[J]. Physics Letters A, 1981, 86(6/7):341-345.
- [9] Chen H H, Lee Y C, Lin J E. On a new hierarchy of symmetries for the Kadomtsev-Petviashvili equation[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1983, 9(3):439-445.
- [10] Chou T, Youjin Z. Backlund transformations for the isospectral and non-isospectral MKdV hierarchies[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1990, 23(13):2867-2877.
- [11] Lou S Y. Twelve sets of symmetries of the Caudrey-Dodd-Gibbon-Sawada-Kotera equation[J]. Physics Letters A, 1993, 175(1):23-26.
- [12] Fuchssteiner B. Mastersymmetries, higher order time-dependent symmetries and conserved densities of nonlinear evolution equations[J]. Progress of Theoretical Physics, 1983, 70(6):1508-1522.
- [13] Lou S Y. Symmetries of the Kadomtsev-Petviashvili equation[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1993, 26(17):4387-4394.
- [14] Lou S Y. Generalized symmetries and w^∞ algebras in three dimensional Toda field theory[J]. Physical Review Letters, 1993, 71(25):4099-4102.
- [15] Lou S Y. Symmetry algebras of the potential Nizhnik-Novikov-Veselov model[J]. Journal of Mathematical Physics, 1994, 35(4):1755-1762.
- [16] Lou S Y. Symmetries and algebras of the integrable dispersive long wave equations in (2+1) dimensional spaces[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1994, 27(9):3235-3243.
- [17] Lou S Y, Hu X B. Infinitely many symmetries of the Davey-Stewartson equation[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1994, 27(7):L207-L212.
- [18] Lou S Y, Qian X M. Generalized symmetries and algebras of the two-dimensional differential-difference Toda equation[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1994, 27(17):L641-L644.
- [19] Lou S Y, Lin J. The generalized symmetry algebra of the bilinear Kadomtsev-Petviashvili equation[J]. Physics Letters A, 1994, 185(1):29-34.
- [20] Han P, Lou S Y. Symmetries of (2+1)-dimensional KdV-Ito equation in bilinear form[J]. Communications in Theoretical Physics, 1994, 22(4):437-442.

- [21] Gardner C S. Korteweg de Vries Equation and generalizations. IV. The KdV Equation as a Hamiltonian system[J]. Journal of Mathematical Physics, 1971, 12(8): 1548-1551.
- [22] Zakharov V E, Schulman E I. Degenerative dispersion laws, motion invariants and kinetic equations[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1980, 1(2):192-202.
- [23] Lin J E, Chen H H. Constraints and conserved quantities of the Kadomtsev-Petviashvili equations[J]. Physics Letters A, 1982, 89(4):163-167.
- [24] Chen H H, Lee Y C, Lin J E. Advances in Nonlinear Wave[M]. 2nd ed. New York: Pitman, 1983.
- [25] Chen H H, Lee Y C, Zhu G C. Symmetries and Lie Algebra for the Kadomtsev-Petviashvili Equation[M]. Plasma: University of Maryland, 1984.
- [26] Chen H H, Lin J E. On the integrability of multi-dimensional nonlinear evolution equations[J]. Journal of Mathematical Physics, 1987, 28(2):347-350.
- [27] Schwarz F. A reduce package for determining Lie symmetries of ordinary and partial differential equations [J]. Computer Physics Communications, 1982, 27(2):179-186.
- [28] David D, Kamran N, Levi D, et al. Symmetry reduction for the Kadomtsev-Petviashvili equation using a loop algebra[J]. Journal of Mathematical Physics, 1986, 27(5): 1225-1237.
- [29] Oevel W, Fuchssteiner B. Explicit formulas for symmetries and conservation laws of the Kadomtsev-Petviashvili equation[J]. Physics Letters A, 1982, 88(7): 323-327.
- [30] Santini P M, Fokas A S. Recursion operators and bi-Hamiltonian structures in multidimensions. I[J]. Communications in Mathematical Physics, 1988, 115(3): 375-419.
- [31] Lou S Y. Painlevé test for the integrable dispersive long wave equations in two space dimensions[J]. Physics Letters A, 1993, 176(1/2):96-100.
- [32] Lou S Y, Ruan H Y, Chen D F, et al. Similarity reduction of the KP equation by a direct method[J]. Journal of Physics A: General Physics, 1999, 24(7):1455-1467.
- [33] Clarkson P A, Winternitz P. Nonclassical symmetry reductions for the Kadomtsev-Petviashvili equation[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1991, 49(3):257-272.

Extended master symmetry approach: Symmetries and infinite-dimensional Lie algebra of the Kadomtsev-Petviashvili equation

FAN Rong, LI Biao*

(School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: In this paper, an extended master symmetry method is proposed and applied to the (2+1)-dimensional integrable model Kadomtsev-Petviashvili (KP) equation, and the generalized symmetry of any function containing time in the equation is obtained. Then an explicit and simple constructive formula for the symmetries of the KP equation is derived directly from the symmetry definition equation, in which the complicated recursion operators are skipped. All the known symmetries appear as special cases for those symmetries obtained in this work. The general infinite-dimensional Lie algebra constituted by these symmetries is also given.

Key words: symmetries; Lie algebra; explicit expression

(责任编辑 章践立)