

利用强对称和逆强对称算子构造可积方程族 ——以势 mKdV 方程的强对称和逆强对称算子为例

陈孜童, 贾 曼*

(宁波大学 物理科学与技术学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 从势 mKdV 方程的对称出发, 利用强对称算子和逆强对称算子, 不仅可以构造 mKdV 方程族和 KdV 方程族, 还可以构造 Liouville 方程族、sinh-Gordon(和/或 sine-Gordon)方程族. 研究表明, 这里构造的 Liouville 方程族、sinh-Gordon(和/或 sine-Gordon)方程族是一个广义势 mKdV 方程族的一半, 而 mKdV 方程族和 KdV 方程族是这个广义势 mKdV 方程族的另一半.

关键词: 强对称和逆强对称算子; 势 mKdV 方程; 势 mKdV 方程族; KdV 方程族; Liouville 方程族; sinh-Gordon(和/或 sine-Gordon)方程族; 广义势 mKdV 方程族

中图分类号: O415

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2020) 05-0099-06

在线性理论日臻完善的今天, 非线性科学已经蓬勃发展于各个研究领域而成为研究焦点. 因此, 在研究过程中将无法避免地碰到各种各样的非线性方程, 而对这些非线性方程的求解无疑成为非线性科学研究的关键, 这也是非线性研究的难点所在. 通过众多科学家的努力, 人们已经建立和发展了不少求解非线性系统的有效方法, 特别是针对其中一些被归为可积的非线性系统, 常用的方法有: 对称性分析^[1]、反散射变换方法^[2]、达布变换方法^[3]、双线性方法^[4]和多线性方法、经典和非经典李群方法^[1,5]、CK 直接法^[6]、形变映射法^[7-8]、Painlevé 截断展开方法^[9]、几何方法^[10]以及穿衣服方法^[11].

在上述列出的研究方法中, 对称性分析^[1,5]是最重要也是最有效的研究方法之一, 它不仅能解决或简化科学问题, 而且在寻找系统的规律性方面有重要作用. Lie^[12]开创性地分析了李群和李代数之间的关系, 他指出对于任意连续群都可以赋予一个非常简单的代数结构, 即李代数. 后来, Olver^[13]证明了可以利用递推算子来产生偏微分方程的无穷多个对称. 在我国李翊神教授、田畴教授

等系统地研究了非线性发展方程的对称、强对称、遗传对称及其李代数结构, 取得了一系列重要的研究成果^[14-15]. 通常, 根据对称的定义去寻求方程的对称往往会遇到很多困难, 尤其是有一些复杂的对称本身就很难直接得到. 利用强对称和逆强对称算子, 可以方便地从系统的一个已知对称得到无穷多对称. 强对称得到的大多是局域对称, 而将逆强对称作用到已知种子对称上, 可以得到非局域对称. 但如何从强对称得到相应的逆强对称, 特别是高维非线性系统的逆强对称是很困难的. 楼森岳教授首次提出了求强对称算子逆算子的因式化方法和形式级数对称理论^[16-19], 该理论不仅可以比较方便地获得强对称算子的逆算子表达式和包含任意函数的广义对称, 以及对称构成的 Kac-Moody-Virasoro 型代数和广义 W_∞ 代数结构^[20], 而且可以构造一大类具有相同对称的可积系统的方程族^[21]. 更进一步, 楼森岳教授将他的思想推广到了高维系统^[22-24], 给出了一些高维系统的强对称和逆强对称算子, 并且得到了相关系统的可积方程族.

本文中, 将从已知的势 mKdV 方程的对称出

收稿日期: 2020-05-11.

宁波大学学报(理工版) 网址: <http://journal.g.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(11675084); 宁波市自然科学基金(2015A610159); 宁波大学王宽诚幸福基金.

第一作者: 陈孜童(1994—), 男, 浙江绍兴人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 非线性物理. E-mail: 627136151@qq.com

*通信作者: 贾曼(1979—), 女, 河北唐山人, 博士/副教授, 主要研究方向: 非线性物理. E-mail: jiaman@nbu.edu.cn

发, 利用已经得到的势 mKdV 方程的强对称和逆强对称算子, 给出势 mKdV 方程的对称构成的无穷维 Lie 代数, 然后构造一些可积方程族. 这些可积方程族可以深刻地揭示不同方程族之间的联系, 以及这些可积方程族和势 mKdV 方程的对称之间的联系.

1 势 mKdV 方程的对称和强对称

势 mKdV 方程:

$$u_t = u_{xxx} - 2u_x^3 \equiv K = K_1^{(0)} \quad (1)$$

的对称可以通过求解相应的线性化方程:

$$\sigma_t = K' \sigma = (D^3 - 6u_x^2 D) \sigma, \quad \left(D = \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad (2)$$

其中线性化算子 G' 为函数 G 在 u 点上沿 σ 方向的 Gateaux 导数, 其定义为:

$$G'[\sigma] = G' \sigma = \frac{d}{d\epsilon} G(x, t, u + \epsilon \sigma) \Big|_{\epsilon=0}, \quad (3)$$

可以看出, 由方程(2)确定的对称是势 mKdV 方程(1)的不变变换群的无穷小生成元^[25-26].

寻找模型对称的方法很多, 其中一个有效的方法是利用强对称算子(递推算子). 将强对称算子作用到种子对称上, 可以得到系统的对称. 如果算子 Φ 满足:

$$\frac{d\Phi}{dt} = [K', \Phi] = K' \Phi - \Phi K', \quad (4)$$

就称其是强对称算子, 也称递推算子. 这就是, 如果 σ 是系统的对称, 将强对称算子 Φ 作用到对称 σ 上, 得到的 $\Phi \sigma$ 也是该系统的对称, 其中 Φ 由方程(4)给出. 可以证明^[21,25], 势 mKdV 方程(1)的一个强对称算子是

$$\Phi = D^2 - 4u_x D^{-1} u_x D, \quad \left(D^{-1} = \int_{-\infty}^x dx \right), \quad (5)$$

它也是一个遗传对称. 这里遗传对称是指对任意函数 f 和 g , 算子 Φ 满足:

$$\begin{aligned} \Phi'[\Phi f]h - \Phi'[\Phi h]f = \\ \Phi(\Phi'[f]h - \Phi'[h]f), \end{aligned} \quad (6)$$

容易验证, 算子 Φ 的逆 Φ^{-1} , 即逆强对称算子(逆递推算子)为:

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{2} D^{-1} g D^{-1} g^{-1} + \frac{1}{2} D^{-1} g^{-1} D^{-1} g, \quad (7)$$

这里

$$g = \exp(2u), \quad (8)$$

也是势 mKdV 方程(1)的一个遗传强对称算子.

2 利用强对称和逆对称算子构造可积方程族

容易直接验证, 势 mKdV 方程(1)有如下对称:

$$K_0^{(0)} = u_x, \quad (9)$$

$$\tau_0^{(0)} = 3tu_x + \frac{1}{2} D^{-1} g D^{-1} g^{-1} = \tau_0^{(1)}, \quad (10)$$

$$\tau_0^{(2)} = -3tu_x + \frac{1}{2} D^{-1} g^{-1} D^{-1} g, \quad (11)$$

$$K_0^{(1)} = D^{-1} g^{-1}, \quad (12)$$

$$K_0^{(2)} = D^{-1} g. \quad (13)$$

我们把上述 5 个对称作为种子对称, 然后将强对称算子 Φ 和它的逆强对称算子 Φ^{-1} 作用到上述种子对称或其线性组合上, 可以得到不同组的对称. 经过计算发现, 势 mKdV 方程的 6 组对称构成无穷维 Lie 代数. 该 6 组对称为:

$$\begin{aligned} K_n^{(0)} = \Phi^n K_0^{(0)}, \quad K_{-n}^{(1)} = \Phi^{-n} K_0^{(1)}, \\ K_{-n}^{(2)} = \Phi^{-n} K_0^{(2)}, \quad \tau_n^{(0)} = \Phi^n \tau_0^{(0)}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\tau_{-n}^{(1)} = \Phi^{-n} \tau_0^{(1)}, \quad \tau_{-n}^{(2)} = \Phi^{-n} \tau_0^{(2)}.$$

它们所构成的无穷维 Lie 代数:

$$[K_n^{(0)}, K_m^{(0)}] = 0, \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots), \quad (15)$$

$$[K_n^{(0)}, K_{-m}^{(1)}] = 0, \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots), \quad (16)$$

$$[K_n^{(0)}, K_{-m}^{(2)}] = 0, \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots), \quad (17)$$

$$[K_{-n}^{(1)}, K_{-m}^{(1)}] = 0, \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots), \quad (18)$$

$$[K_{-n}^{(2)}, K_{-m}^{(2)}] = 0, \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots), \quad (19)$$

$$[K_{-n}^{(2)}, K_{-m}^{(2)}] = 4\tau_{-m-n}^{(1)} + 4\tau_{-m-n}^{(2)}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} [K_n^{(0)}, \tau_m^{(0)}] = (2n+1)K_{m+n+1}^{(0)}, \\ (m, n = 0, 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} [\tau_n^{(0)}, \tau_m^{(0)}] = 2(n-m)\tau_{m+n-1}^{(0)}, \\ (m, n = 0, 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} [K_{-n}^{(1)}, \tau_{-m}^{(1)}] = -2(n+1)K_{-m-n-1}^{(1)}, \\ (m, n = 0, 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} [K_{-n}^{(1)}, \tau_m^{(0)}] = -(2n+1)K_{m-n-1}^{(1)}, \\ (m = 1, 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (24)$$

$$[\tau_{-n}^{(1)}, \tau_{-m}^{(2)}] = 2(n+1)\tau_{-m-n-1}^{(1)} + 2(m+1)\tau_{-m-n-1}^{(2)},$$

$$(m, n = 0, 1, 2, \dots), \quad (25)$$

$$[\tau_n^{(0)}, \tau_{-m}^{(1)}] = 2(n+m)\tau_{-m+n-1}^{(1)},$$

$$(m, n = 0, 1, 2, \dots), \quad (26)$$

$$[\tau_n^{(0)}, \tau_{-m}^{(2)}] = 2(n+m)\tau_{-m+n-1}^{(2)},$$

$$(m = 1, 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots), \quad (27)$$

$$[\tau_{-n}^{(1)}, \tau_{-m}^{(1)}] = 2(m-n)\tau_{-m-n-1}^{(1)},$$

$$(m, n = 0, 1, 2, \dots), \quad (28)$$

$$[K_n^{(0)}, \tau_{-m}^{(1)}] = (2n+1)K_{-m+n-1}^{(0)},$$

$$(m, n = 0, 1, 2, \dots), \quad (29)$$

$$[K_n^{(0)}, \tau_{-m}^{(2)}] = -(2n+1)K_{-m+n-1}^{(0)},$$

$$(m, n = 0, 1, 2, \dots), \quad (30)$$

$$[K_{-n}^{(1)}, \tau_{-m}^{(2)}] = 2nK_{-m-n-1}^{(1)},$$

$$(m, n = 0, 1, 2, \dots), \quad (31)$$

$$[K_{-n}^{(2)}, \tau_{-m}^{(1)}] = -2nK_{-m-n-1}^{(2)},$$

$$(m, n = 0, 1, 2, \dots), \quad (32)$$

$$[K_{-n}^{(2)}, \tau_m^{(0)}] = -(2n+1)K_{m+n-1}^{(2)},$$

$$(m = 1, 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots), \quad (33)$$

$$[K_{-n}^{(2)}, \tau_{-m}^{(2)}] = 2(n+1)K_{-m-n-1}^{(2)},$$

$$(m, n = 0, 1, 2, \dots), \quad (34)$$

$$[\tau_{-n}^{(2)}, \tau_{-m}^{(2)}] = 2(n-m)\tau_{-m-n-1}^{(2)},$$

$$(m, n = 0, 1, 2, \dots), \quad (35)$$

这里的 Lie 括号定义为:

$$[f, h] = f'h - hf'. \quad (36)$$

从任意一族对称出发, 可以构造一族可积方程. 这里我们给出一些有意思的可积方程族.

(I) 势 mKdV 的 $K^{(0)}$ 族(高阶势 mKdV 方程族)

$$u_t = \Phi^n K_0^{(0)}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (37)$$

这是传统意义上的势 mKdV 方程族, 相关研究结果参考文献[26].

(II) 势 mKdV 的 $\tau^{(0)}$ 族(变系数的势 mKdV 方程族)

$$u_t = \Phi^n \tau_0^{(0)}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (38)$$

对 $n=1$, 上述方程成为:

$$u_t = 3t(u_{xxx} - 2u_x^3) + xu_x + \frac{1}{2}, \quad (39)$$

我们可以把它看成是变系数势 mKdV 方程的一个特例^[27-28].

(III) 势 mKdV 的 $K^{(2)}$ 族(Liouville I 族)

$$u_t = \Phi^{-n} K_0^{(2)}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (40)$$

该族的前 2 个方程为:

$$u_t = D^{-1} \exp(2u), \quad (41)$$

$$u_t = \frac{1}{2} (D^{-1} g D^{-1} g^{-1} + D^{-1} g^{-1} D^{-1} g) D^{-1} g, \quad (42)$$

方程(41)就是著名的 Liouville 方程:

$$u_{xt} = \exp(2u). \quad (43)$$

目前的研究结果表明, 在 2 维引力^[29-30]和共形场论^[31-32]的研究中, KdV 方程族和 Liouville 模型紧密相关. 从我们的研究结果看, Liouville 方程(41)或(43)可以认为是势 mKdV 族(势 mKdV 的 $K^{(2)}$ 族)中的一个方程.

(IV) 势 mKdV 的 $K^{(1)}$ 族

$$u_t = \Phi^{-n} K_0^{(1)}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (44)$$

我们把它称为 Liouville II 族. 可以看出, Liouville II 族的前 2 个方程是:

$$u_t = D^{-1} \exp(-2u), \quad (45)$$

$$u_t = \frac{1}{2} (D^{-1} g D^{-1} g^{-1} + D^{-1} g^{-1} D^{-1} g) D^{-1} g^{-1}. \quad (46)$$

需要说明的是, 从势 mKdV 方程的 $K^{(1)}$ 族对称出发, 可以很容易地导出 Liouville I 族和 Liouville II 族的对称和 Lie 代数. 例如, 可以直接验证式(5)和式(7)中给出的 Φ 和 Φ^{-1} 同样也是 Liouville I 族和 Liouville II 族, 即方程(40)和方程(44)的遗传强对称算子. 进一步可验证, $K_0^{(0)}$ 、 $K_0^{(2)}$ 和 $\tau_0^{(2)} = tK_0^{(2)} - xu_x$ 是 Liouville I 族的种子对称, 而 $K_0^{(0)}$ 、 $K_0^{(1)}$ 和 $\tau_0^{(1)} = tK_0^{(1)} - xu_x$ 是 Liouville II 族的种子对称. 将强对称 Φ 和 Φ^{-1} 作用到这些种子对称上, 可以得到 3 组 Liouville I 族和 Liouville II 族的对称. 式(15)、(17)、(19)、(30)和(34)构成了 Liouville I 族的无穷维 Lie 代数; 式(15)、(16)、(18)、(23)、(28)和(29)构成了 Liouville II 族的无穷维 Lie 代数.

(V) sinh-Gordon 族和/或 sine-Gordon 族(势 mKdV 的 $K^{(2)} - K^{(1)}$ 族)

由于对称方程满足的方程(2)是线性方程, 所以对称的线性组合也是势 mKdV 方程的对称. 选取:

$$\frac{1}{4}(K_0^{(2)} - K_0^{(1)}) = \frac{1}{2}D^{-1}\sinh(2u), \quad (47)$$

作为种子对称,可以得到 $\sinh$ -Gordon 族和/或 $\sinh$ -Gordon 族:

$$u_t = \frac{1}{2}\Phi^{-n}(D^{-1}\sinh(2u)), (n=0,1,2,\cdots), \quad (48)$$

对式(48)做变换:

$$u = \frac{1}{2}\phi, \quad (49)$$

可积方程族(48)的第 1 个方程就是 $\sinh$ -Gordon 方程:

$$\phi_{xt} = \sinh \phi, \quad (50)$$

若变换的形式取为:

$$u = \frac{1}{2}i\phi, \quad (51)$$

就可得到 $\sinh$ -Gordon 方程:

$$\phi_{xt} = \sin \phi, \quad (52)$$

容易验证, Φ 和 Φ^{-1} 分别是方程族(48)的遗传强对称和逆强对称算子; 而 $K_n^{(0)}$ 、 $(K_{-n}^{(2)} - K_{-n}^{(1)})$ 和 $\tau_n^{(1)} = \Phi^n t D^{-1} \sinh(2u) - 2xu_x$ 都是方程族(48)的对称.

(VI)广义势 mKdV 族

如果取

$$\sigma_0 = AK_0^{(0)} + BK_0^{(1)} + CK_0^{(2)} + E\tau_0^{(0)} + F\tau_0^{(2)}, \quad (53)$$

为势 mKdV 方程的种子对称, 这里 A, B, C, E 和 F 是任意常数, 那就得到了广义势 mKdV 族:

$$u_t = \sigma_n = \Phi^n \sigma_0, (n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \quad (54)$$

显然, 通过选取合适的参数 A, B, C, E 和 F , 可以从式(54)得到(I)~(V)中的任何一个方程族. 也就是, 上面列出的(I)~(V)都是广义势 mKdV 族式(54)的特例.

3 结论

利用势 mKdV 方程的对称, 可构造可积模型族. Liouville 方程、 $\sinh$ -Gordon($\sinh$ -Gordon)方程和势 mKdV 方程都可以看成是广义可积族式(54)的特例. 取 $n < 0$ 和适当的参数 A, B, C, E 和 F , 可以从广义可积族式(54)得到 Liouville 方程族(方程(40)和(44))、 $\sinh$ -Gordon(和/或 $\sinh$ -Gordon)方程族(方程(48)). 取 $n > 0$ 和参数 E, F 为 0, 可从广义可积族式(54)得到一般的势 mKdV(和/或 KdV)方程族.

Liouville 方程族(方程(40)和(44))和 $\sinh$ -Gordon(和/或 $\sinh$ -Gordon)方程族(方程(48))是广义可积族式(54)的一半($n < 0$ 部分), 而势 mKdV(和/或 KdV)方程族是广义可积族式(54)的另一半($n > 0$ 部分). 上述方程族具有共同的对称和遗传强对称.

容易看出, 构造可积模型方程族的关键在于找到方程的强对称和逆强对称算子. 事实上, 寻找强对称算子很困难, 而在此基础上再寻找它的逆更困难, 因此国际上有些专家认为这是不可能找到的^[33]. 楼森岳教授将逆强对称算子因式化后, 成功地得到了(1+1)维系统的逆强对称算子和大量的新对称^[21], 并由此开辟了非局域逆对称和可积负梯队研究的新方向^[34].

在高维情况下, 可积系统递推算子不存在, 寻找逆对称和负可积梯队一度是非常困难的问题. 后来, 楼森岳、胡星标教授借助高维可积系统的 Lax 对^[35]提出了达布变换的无穷小方法、无穷多 Lax 对方法、内部参数法等, 统一给出了高维和低维可积系统非局域对称和可积负梯队研究的全新方法, 为成功研究各种非线性模式相互作用打下了坚实的理论基础.

最新研究表明^[36-38], 强对称和逆强对称算子与可积系统的重要性质与 Lax 对、Darboux 变换和 Bäcklund 变换以及 Painlevé 性质之间都有着重要联系. Darboux 变换对应的对称代数是而非局域对称代数; Darboux 变换和 Bäcklund 变换、留数对称、逆强对称算子所用的对称约束等完全对应于等价的非局域对称; 在 Painlevé 分析的标准截断展开中关于奇性流形的留数正是利用非局域对称与 Darboux 变换和 Bäcklund 变换群相关的对称代数所得到. 利用非局域对称, 我们可以得到大量的新的传统方法所无法得到的各种不同类型非线性波的相互作用解, 如椭圆周期波与孤立波的相互作用, Painlevé 波和孤立波的相互作用, Airy 波、Bessel 波、任意 Boussinesq 波等与孤立波的相互作用. 在此基础上, 成功地建立了意义深刻的 CRE/CTE 可积性理论和方法^[39], 这些方法不但简单、易懂、易操作, 而且得到了系统大量新的相互作用解.

相信, 对称性在揭示非线性物理中一些深层次的内在联系和可能的实际物理应用中还会起更重要的作用.

参考文献:

- [1] Olver P J. Introduction to Lie Groups[M]//Applications of Lie Groups to Differential Equations. New York: Springer, 1993:1-74.
- [2] Drazin P G, Johnson R S. Solitons[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1989:39-86.
- [3] 谷超豪, 胡和生, 周子翔. 孤立子理论中的达布变换及其几何应用[M]. 2 版. 上海: 上海科学技术出版社, 2005.
- [4] Hirota R. Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons[J]. Physical Review Letters, 1971, 27(18):1192-1194.
- [5] Bluman G W, Kumei S. Symmetries and Differential Equation[M]. Berlin: Springer, 1989.
- [6] Clarkson P A, Kruskal M D. New similarity reductions of the Boussinesq equation[J]. Journal of Mathematical Physics, 1989, 30(10):2201-2213.
- [7] Lou S Y, Ni G J. The relations among a special type of solutions in some (D+1)-dimensional nonlinear equations [J]. Journal of Mathematical Physics, 1989, 30(7):1614-1620.
- [8] Lou S Y, Huang G X, Ni G J. Transforming some special solutions of the Φ^4 model to that of the Φ^6 and $\Phi^4+\Phi^3$ models[J]. Physics Letters A, 1990, 146(1/2):45-49.
- [9] Weiss J, Tabor M, Carnevale G. The Painlevé property for partial differential equations[J]. Journal of Mathematical Physics, 1983, 24(3):522-526.
- [10] Doyle P W. Separation of variables for scalar evolution equations in one space dimension[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1996, 29(23):7581-7595.
- [11] Zakharov V E, Shabat A B. A scheme for integrating the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem. I[J]. Functional Analysis and Its Applications, 1974, 8:43-53.
- [12] Lie S. Über die integration durch bestimmte integrals von einer Klasse linearer partieller differential gleichungen[J]. Archiv Der Mathematik, 1881, 6:328-368.
- [13] Olver P J. Evolution equations possessing infinitely many symmetries[J]. Journal of Mathematical Physics, 1977, 18(6):1212-1215.
- [14] Li Y S, Zhu G C. New set of symmetries of the integrable equations, Lie algebra and non-isospectral evolution equations (II): AKNS system[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1986, 19(18):3713-3725.
- [15] Tian C. Symmetries and a hierarchy of the general KdV equation[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1987, 2:309-366.
- [16] Lou S Y. Recursion operator and symmetry structure of the Kawamoto-type equation[J]. Physics Letters A, 1993, 181(1):13-16.
- [17] Lou S Y. Twelve sets of the symmetries of the Caudry-Dodd-Gibbon-Sawada-Kortera equation[J]. Physics Letters A, 1993, 175(1):23-26.
- [18] Lou S Y, Chen W Z. Inverse recursion operator of the AKNS hierarchy[J]. Physics Letters A, 1993, 179(4/5):271-274.
- [19] Lou S Y. Abundant symmetries for the 1+1 dimensional classical Liouville field theory[J]. Journal of Mathematical Physics, 1994, 35(5):2336-2348.
- [20] Lou S Y. Generalized symmetries and W_∞ algebras in three-dimensional Toda field theory[J]. Physical Review Letters, 1993, 7(25):4099-4102.
- [21] Lou S Y. Symmetries of the KdV equation and four hierarchies of the integrodifferential KdV equations[J]. Journal of Mathematical Physics, 1994, 35(5):2390-2396.
- [22] Lou S Y. Negative Kadomtsev-Petviashvili equation and extension of the sinh-Gordon equation[J]. Physics Letters A, 1994, 187(3):239-242.
- [23] Lou S Y. Higher-dimensional integrable models with a common recursion operator[J]. Communications in Theoretical Physics, 1997, 28(1):41-50.
- [24] Lou S Y. Negative Kadomtsev-Petviashvili hierarchy[J]. Physica Scripta, 1998, 57(4):481-485.
- [25] 谷超豪. 孤立子理论与应用[M]. 杭州: 浙江科学技术出版社, 1990:256-257.
- [26] Lou S Y. Conserved charges for the potential MKdV equation and the related integrable hierarchies[J]. Journal of Ningbo Normal University: Science Edition, 1994, 12: 43-53.
- [27] 楼森岳, 阮航宇. 变系数 KdV 方程和变系数 MKdV 方程的无穷多守恒律[J]. 物理学报, 1992, 41(2):182-187.
- [28] Lou S Y. Pseudopotentials, Lax pairs and Bäcklund transformations for some variable coefficient nonlinear equations[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1991, 24(10):L513-L518.
- [29] Douglas M R. Strings in less than one dimension and the generalized KdV hierarchies[J]. Physics Letters B, 1990, 238(2/3/4):176-180.
- [30] Banks T, Douglas M R, Seiberg N, et al. Microscopic and macroscopic loops in non-perturbative two dimensional gravity[J]. Physics Letters B, 1990, 238(2/3/4):279-286.
- [31] Guo H Y, Wang S K, Wang Z H, et al. Beltrami gauge symmetry and 2D induced gravity[J]. Communications in

- Theoretical Physics, 1990, 14(1):99-106.
- [32] Belavin A A, Polyakov A M, Zamolodchikov A B. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory[J]. Nuclear Physics B, 1984, 241(2):333-380.
- [33] Verosky J M. Negative powers of Olver recursion operators[J]. Journal of Mathematical Physics, 1991, 32(7):1733-1736.
- [34] Lou S Y. Integrable models constructed from the symmetries of the modified KdV equation[J]. Physics Letters B, 1993, 302(2/3):261-264.
- [35] Lou S Y, Hu X B. Infinitely many Lax pairs and symmetry constraints of the KP equation[J]. Journal of Mathematical Physics, 1997, 38(12):6401-6427.
- [36] Lou S Y, Hu X B. Non-local symmetries via Darboux transformations[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1997, 30(5):L95-L100.
- [37] Hu X R, Lou S Y, Chen Y. Explicit solutions from eigenfunction symmetry of the Korteweg-de Vries equation[EB/OL]. [2020-03-10]. <https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.85.056607>.
- [38] Lou S Y, Hu X R, Chen Y. Nonlocal symmetries related to Bäcklund transformation and their applications[EB/OL]. [2020-03-10]. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1751-8113/45/15/155209>.
- [39] Lou S Y. Consistent Riccati expansion for integrable systems[J]. Studies in Applied Mathematics, 2015, 134(3):372-402.

Integrable models constructed from symmetries of potential mKdV equation

CHEN Zitong, JIA Man*

(School of Physical Science and Technology, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: Starting from the symmetries of the potential modified KdV(mKdV) equation, Liouville, sinh-Gordon and/or sine-Gordon hierarchies can be established other than the potential mKdV hierarchies and the KdV hierarchies. The Liouville, sinh-Gordon and/or sine-Gordon hierarchies can be considered as one half hierarchy of the generalized potential mKdV hierarchy while the usual potential mKdV hierarchy can be thought of as another half hierarchy of the generalized potential mKdV hierarchy.

Key words: strong symmetry and inverse recursion operator; potential mKdV equation; potential mKdV hierarchies; KdV hierarchies; Liouville hierarchies; sinh-Gordon and/or sine-Gordon hierarchies; generalized potential mKdV hierarchy

(责任编辑 史小丽)