

Kadomtsev-Petviashvili 方程的直接相似约化

李家恒, 李彪*

(宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: Clarkson 和 Kruskal 发展的直接法(CK 直接法)是求解非线性微分方程相似约化的一种强有力的方法. 本文以 Kadomtsev-Petviashvili(KP)方程为例, 运用 CK 直接法把 KP 方程简化为 3 种类型的(1+1)维偏微分方程, 这 3 种偏微分方程等价于经典 Lie 方法得到的 3 种具有不同独立变量的相似约化方程. KP 方程的解包含了更多经典 Lie 方法所遗漏的任意函数, 例如, CK 直接法得到的第 3 类约化可以分为 3 个子情形, 而经典 Lie 法得到的 KP 方程的第 3 类解只是我们结果的一个子情形的特例.

关键词: 相似约化; KP 方程; CK 直接法; (1+1)维偏微分方程; Lie 方法

中图分类号: O175.2

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2020) 05-0105-09

Kadomtsev-Petviashvili 方程(KPE)^[1]为:

$$-u_{tx} + 6u_x^2 + 6uu_{xx} + u_{xxx} + u_{yy} = 0, \quad (1)$$

下标表示微分, 出现在许多物理领域, 特别是在流体力学、等离子体物理、空气动力学等. KPE 在数学中也相当重要, 因为它是少数几个在(1+1)维以上完全可积的方程之一. 此外, KPE 允许一个无限维的对称 Lie 群. David 等^[2]利用对称代数的一维子代数, 将 KPE 分别化为 2 个变量的偏微分方程(PDE): Boussinesq 方程、一次微分 Korteweg-de Vries 方程(KdVE)和一个线性方程. 我们选择文献[3]中令 $\alpha^2 = 1/3$ 的 KPE 形式, 而不是文献[2]中的形式, 虽然文献[2]和文献[3]中方程是等价的.

在文献[4]中, Clarkson 和 Kruskal 发展了一种不基于 Lie 对称理论的直接求解非线性微分方程相似约化的直接法. 之后该方法被广泛应用并发展, 得到了大批非线性微分方程的相似约化^[5-19].

本文以 KP 方程为例说明这一方法: 将 KPE 简化为一些常微分方程(ODEs)^[6]. 为了探索经典 Lie 方法和 CK 直接法之间的联系, 找出 KPE 的所有可能的对称约化, 我们将用 CK 直接法把 KPE 约化为(1+1)维的偏微分方程, 发现将 KPE 还原为(1+1)维

偏微分方程的所有约化量. 所有的约化方程都可以转化为经典 Lie 方法的结果, 但具有更一般的独立变量. 换言之, 用 CK 直接法得到的结果包含一些经典 Lie 方法所遗漏的任意函数.

1 KPE 的对称性约化

本文的所有相似解如下:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= U(x, y, t, w(\xi, \eta)), \\ \xi &= \xi(x, y, t), \\ \eta &= \eta(x, y, t), \end{aligned} \quad (2)$$

式中: U 、 ξ 和 η 为所示变量的函数, 且 $w(\xi, \eta)$ 满足 2 个变量的 PDE. ξ 、 η 可以由方程(2)代入方程(1)所得. 然而, 我们可以证明在特殊形式下寻求 KPE 的相似度约化是足够的.

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \alpha(x, y, t) + \\ &\beta(x, y, t)w(\xi(x, y, t), \eta(x, y, t)), \end{aligned} \quad (3)$$

而不是最一般形式方程(2).

将方程(3)代入方程(1)得:

$$\begin{aligned} &\gamma_0 w_{\xi\xi\xi\xi} + \gamma_1 w_{\eta\eta\eta\eta} + 6\gamma_2 (w_\xi^2 + w w_{\xi\xi}) + \\ &6\gamma_3 (w_\eta^2 + w w_{\eta\eta}) + 12\gamma_4 (w_\xi w_\eta + w w_{\xi\eta}) + \\ &4\gamma_5 w_{\xi\xi\xi\eta} + 4\gamma_6 w_{\eta\eta\eta\xi} + 6\gamma_7 w_{\xi\xi\eta\eta} + \end{aligned}$$

收稿日期: 2020-05-11.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journal.lg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(11775121, 11435005); 浙江省教育厅科研项目(Y200907622); 宁波大学科技学院预研项目(003-21021003).

第一作者: 李家恒(1996-), 男, 湖北大冶人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 非线性数学物理. E-mail: 915594389@qq.com

*通信作者: 李彪(1971-), 男, 湖南会同人, 博士/教授, 主要研究方向: 非线性数学物理. E-mail: libiao@nbu.edu.cn

$$\begin{aligned} & 6\gamma_8 w^2 + 6\gamma_9 w w_\xi + 6\gamma_{10} w w_\eta + \gamma_{11} w_{\xi\xi\xi}^2 + \\ & \gamma_{12} w_{\eta\eta\eta} + \gamma_{13} w_{\xi\xi\eta} + \gamma_{14} w_{\eta\eta\xi} + \\ & \gamma_{15} + \gamma_{16} w + \gamma_{17} w_\xi + \gamma_{18} w_\eta + \gamma_{19} w_{\xi\xi} + \\ & \gamma_{20} w_{\xi\xi} + \gamma_{21} w_{\xi\eta} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

其中:

$$\gamma_0 = \beta \xi_x^4, \quad (5)$$

$$\gamma_1 = \beta \eta_x^4, \quad (6)$$

$$\gamma_2 = \beta^2 \xi_x^2, \quad (7)$$

$$\gamma_3 = \beta^2 \eta_x^2, \quad (8)$$

$$\gamma_4 = \beta^2 \eta_x \xi_x, \quad (9)$$

$$\gamma_5 = \beta \xi_x^3 \eta_x, \quad (10)$$

$$\gamma_6 = \beta \eta_x^3 \xi_x, \quad (11)$$

$$\gamma_7 = \beta \xi_x^2 \eta_x^2, \quad (12)$$

$$\gamma_8 = \beta_x^2 + \beta \beta_{xx}, \quad (13)$$

$$\gamma_9 = 4\beta \beta_x \xi_x + \beta^2 \xi_{xx}, \quad (14)$$

$$\gamma_{10} = 4\beta_x \beta \eta_x + \beta^2 \eta_{xx}, \quad (15)$$

$$\gamma_{11} = 4\beta_x \xi_x^3 + 6\beta \xi_x^2 \xi_{xx}, \quad (16)$$

$$\gamma_{12} = 4\beta_x \eta_x^3 + 6\beta \eta_x^2 \eta_{xx}, \quad (17)$$

$$\gamma_{13} = 12\beta \eta_x \xi_x \xi_{xx} + 12\beta_x \eta_x \xi_x^2 + 6\beta \eta_{xx} \xi_x^2, \quad (18)$$

$$\gamma_{14} = 12\beta \xi_x \eta_x \eta_{xx} + 12\beta_x \xi_x \eta_x^2 + 6\beta \xi_{xx} \eta_x^2, \quad (19)$$

$$\gamma_{15} = -\alpha_{tx} + 6\alpha_x^2 + 6\alpha \alpha_{xx} + \alpha_{yy} + \alpha_{xxx}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{16} = & -\beta_{tx} + 12\alpha_x \beta_x + 6\alpha \beta_{xx} + \\ & 6\alpha_{xx} \beta + \beta_{yy} + \beta_{xxx}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{17} = & -\beta_t \xi_x - \beta_x \xi_t - \beta \xi_{tx} + 12\alpha_x \beta \xi_x + \\ & 12\alpha \beta_x \xi_x + 6\alpha \beta \xi_{xx} + 2\beta_y \xi_y + \beta \xi_{yy} + \\ & 4\beta_{xxx} \xi_x + 4\beta_x \xi_{xxx} + \beta \xi_{xxx} + 6\beta_{xx} \xi_{xx}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{18} = & -\beta_t \eta_x - \beta_x \eta_t - \beta \eta_{tx} + 12\alpha_x \beta \eta_x + \\ & 12\alpha \beta_x \eta_x + 6\alpha \beta \eta_{xx} + 2\beta_y \eta_y + \beta \eta_{yy} + \\ & 4\beta_{xxx} \eta_x + 4\beta_x \eta_{xxx} + \beta \eta_{xxx} + 6\beta_{xx} \eta_{xx}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{19} = & -\beta \xi_t \xi_x + 6\alpha \beta \xi_x^2 + 4\beta \eta_{xxx} \eta_x + \\ & 12\beta_x \xi_{xx} \xi_x + 6\beta_x \xi_x^2 + 3\beta \eta_x^2 + \beta \xi_y^2, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\gamma_{20} = -\beta \eta_t \eta_x + 6\alpha \beta \eta_x^2 + 4\beta \eta_{xxx} \eta_x +$$

$$12\beta_x \eta_{xx} \eta_x + 6\beta_{xx} \eta_x^2 + 3\beta \eta_{xx}^2 + \beta \eta_y^2, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{21} = & -\beta \xi_t \eta_x - \beta \eta_t \xi_x + 12\alpha \beta \xi_x \eta_x + \\ & 4\beta \eta_{xxx} \xi_x + 12\beta \xi_{xx} \eta_x + 12\beta_x \eta_{xx} \xi_x + \\ & 6\beta \xi_{xx} \eta_{xx} + 12\beta_{xx} \eta_{xx} + 2\beta \xi_y \eta_y. \end{aligned} \quad (26)$$

方程(4)是一个 $w(\xi, \eta)$ 的 PDE 在 2 个变量中的偏微分方程, 只是 $w(\xi, \eta)$ 的不同偏导数的系数之比和 $w(\xi, \eta)$ 的幂是 ξ 和 η 的函数. 如果 $\xi_x \neq 0$, 则这些条件为:

$$\gamma_i = \gamma_0 \Gamma_i(\xi, \eta), \quad i=1, 2, 3, \dots, 21, \quad (27)$$

其中: $\Gamma_i(\xi, \eta), i=1, 2, \dots, 21$ 是 ξ 和 η 的一些任意函数, 稍后可以确定. 在 α, β, ξ, η 和 w 的确定中, 存在一些不失一般性的自由度.

注 1 如果 $\alpha(x, y, t)$ 有 $\alpha = \beta(x, y, t), \Omega(\xi, \eta) + \alpha_0(x, y, t)$ 的形式, 那么我们可以取 $\Omega \equiv 0$ (通过替换 $w \rightarrow w(\xi, \eta) - \Omega(\xi, \eta)$).

注 2 如果 $\beta(x, y, t)$ 的形式为 $\beta = \beta_0(x, y, t) \cdot \Omega(\xi, \eta)$, 则取 $\Omega \equiv \Omega_0 \equiv \text{常数}$ (用 $w \rightarrow w(\xi, \eta) \Omega_0 / \Omega(\xi, \eta)$).

注 3 如果 $\xi = \xi_0(x, y, t, \eta)$ (或 $\eta = \eta_0(x, y, t, \xi)$), 那么我们可以取 $\xi = \xi_0$ (或 $\eta = \eta_0$), 通过 $w(\xi(\xi_0, \eta), \eta)$ 或 $w(\xi, \eta(\xi, \eta_0)) \rightarrow w(\xi_0, \eta)$ 或 $w(\xi, \eta_0)$.

注 4 如果 $\xi(x, y, t)$ 或 $\eta(x, y, t)$ 是由一个形如 $\Omega(\xi) = \xi_0(x, y, t)$ 或 $\Omega(\eta) = \eta_0(x, y, t)$ 的方程, 其中 $\Omega(\xi)$ 或 $\Omega(\eta)$ 是任何可逆函数, 那么我们可以取 $\Omega(\xi) = \xi$ 或 $\Omega(\eta) = \eta$ (通过 $\xi \rightarrow \Omega^{-1}(\xi)$ 或 $\eta \rightarrow \Omega^{-1}(\eta)$).

需要指出的是, 每个自由度只需使用一次对应的注就可以确定, 即注 1 和注 2 只能使用一次, 注 3 和注 4 只能使用 2 次 (一次用于 ξ , 另一次用于 η), 如果更多地使用, 就会失去一般性.

利用注 1~4 确定 α, β, ξ, η 和 w 的自由度, 并仔细分析式(27), 我们得到了式(27)的 3 种可能的非等价解 (见附录的详细推导):

(i)

$$\begin{aligned} u = & -\frac{1}{6} \theta^4 Z_1^2 x^2 + \left(\frac{\theta}{6\theta} - \frac{Z_1}{6} (\eta_t + 2\theta^3 Z_1 \sigma + \theta^3 Z_2) \right) x + \\ & \frac{\sigma_t}{6\theta} - \frac{1}{6\theta^2} \left(\frac{1}{2\theta} \eta_t + \theta^2 Z_1 \sigma + \frac{1}{2} \theta^2 Z_2 \right) + \\ & \theta^2 w(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\xi = \theta x + \sigma, \quad (29a)$$

$$\theta_y = \theta^3 Z_1, \quad (29b)$$

$$\eta = \int^y \theta^2(y', t) dy' + \eta_0(t), \quad (29c)$$

$$\sigma = \exp\left(\int^y \theta^2(y', t) Z_1(\eta(y', t)) dy'\right) \cdot \left(\sigma_0(t) + \int^y \frac{1}{2\theta(y', t)} \cdot (\eta_t(y', t) + \theta^3(y', t) Z_2(\eta(y', t))) \cdot \exp\left(\int^y \theta^2(y', t) Z_1(\eta(y', t)) dy'\right) dy'\right), \quad (30)$$

并且 $w(\xi, \eta)$ 是由以下式子定义:

$$\begin{aligned} & w_{\xi\xi\xi\xi} + 6(w w_{\xi\xi})_{\xi} + w_{\eta\eta} + \\ & (2Z_1\xi + Z_2)w_{\xi\eta} + 6Z_1w_{\eta} + \\ & \left((3Z_1^2 + Z_{1\eta})\xi + \frac{3}{2}Z_1Z_2 + \frac{1}{2}Z_{2\eta}\right)w_{\xi} + \\ & (6Z_1^2 + 2Z_{1\eta})w = \\ & \left(3Z_1^4 + 4Z_1^2Z_{1\eta} + \frac{1}{3}Z_{1\eta}^2 + \frac{1}{3}Z_1Z_{1\eta\eta}\right)\xi^2 + \\ & \left(\frac{1}{3}Z_{1\eta}Z_{2\eta} + \frac{1}{6}Z_2Z_{1\eta\eta} + \frac{1}{6}Z_1Z_{2\eta\eta} + \right. \\ & \left. \frac{5}{2}Z_1Z_2Z_{1\eta} + 3Z_1^3Z_2 + \frac{3}{2}Z_1^2Z_{2\eta}\right)\xi + \\ & \frac{1}{4}Z_{1\eta}Z_2^2 + \frac{3}{4}Z_1^2Z_2^2 + \frac{3}{4}Z_1Z_2Z_{2\eta} + \\ & \frac{1}{12}Z_{2\eta}^2 + \frac{1}{12}Z_2Z_{2\eta\eta}, \end{aligned} \quad (31)$$

其中: $Z_1(\eta)$ 和 $Z_2(\eta)$ 是 η 的任意函数, 且 $\eta_0(t)$ 以及 $\sigma_0(t)$ 是 t 的任意函数.

(ii)

$$\begin{aligned} u = & \frac{1}{6\theta^2}(\theta\theta_t x + (\sigma_{2t}\theta - 4\sigma_2^2)y^2 + \\ & (\theta\sigma_{1t} + 4\sigma_2\sigma_{1t})y + (\theta\sigma_{0t} - \sigma_1^2)) + \\ & \theta^2 w(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (32)$$

$$\xi = \theta x + \sigma_2 y^2 + \sigma_{1t} y + \sigma_0, \quad (33)$$

$$\eta = \int^t \theta^3(t') dt', \quad (34)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(F\theta^4 + \theta_t), \quad (35)$$

并且 $w(\xi, \eta)$ 方程为:

$$(w_{\xi\xi\xi\xi} + 6w w_{\xi\xi} - w_{\eta})_{\xi} + F(\eta)w_{\xi} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}F_{\eta} - F^2\right) = 0, \quad (36)$$

其中: $F(\eta)$ 是关于 η 的任意函数, 且 θ , σ_1 , σ_0 是关于 t 的任意函数.

(iii)

$$u = \alpha_2(y, t)x^2 + \alpha_1(y, t)x + w(y, t), \quad (37)$$

且 $\alpha_2(y, t)$, $\alpha_1(y, t)$ 和 $w(y, t)$ 满足:

$$\alpha_{2yy} + 36\alpha_2^2 = 0, \quad (38)$$

$$\alpha_{1yy} + 36\alpha_2\alpha_1 - 2\alpha_{2t} = 0, \quad (39)$$

$$w_{yy} + 12\alpha_2 w + 6\alpha_1^2 - \alpha_{1t} = 0. \quad (40)$$

约化方程(31), 方程(36)和(40)可进一步约化. 为简化这些约化方程, 不能直接对这些方程中出现的任意函数进行某些约束, 因为使用了所有的注(见附录)来固定所有的自由度, 除注4中的 ξ 之外, 因它不能用来解决这些任意函数. 然而, 可以通过因变量和自变量的一些变换来简化约化方程, 这等价于这些注的不同用法. 为更清楚地了解这一性质, 首先讨论 KPE 的第3种相似约化.

对于 KPE 的第3种相似约化, 变换为:

$$\begin{aligned} w & \rightarrow C_1 B(y, t) + \\ & \int^y B^{-2}(y, t) \int^{y_1} ((y', t) - 6\alpha_1^2(y', t)) \alpha_{1t} \cdot \\ & B^2(y', t) dy' dy_1 + B(y, t) q(Z(y, t), t), \end{aligned} \quad (41a)$$

$$Z(y, t) = C_2(t) \int^y B^{-2}(y', t) dy' + Z_0(t), \quad (41b)$$

其中: $B(y, t)$ 由式(41c)决定:

$$B + 12\alpha_2 B = 0. \quad (41c)$$

将方程(40)简化为:

$$q_{zz} = 0, \quad (41d)$$

其形式与经典 Lie 方法相同, 只是自变量不同, 用 Z 代替了 y ; 此外, 在 KPE 的解中引入了更多的任意函数, 如 t , $C_1(t)$, $C_2(t)$, $Z_0(t)$ 和另外2个, 它们将出现在式(41c)的解中, 而这是不能用经典 Lie 方法得到的. 为了完整起见, 把这种情况下的所有解都写下来.

(iiia)第1种类型方程(38)~(40)的特解为:

$$\alpha_2 = 0, \quad (42)$$

$$\alpha_1 = A_1(t)y + A_0(t), \quad (43)$$

$$u(x, y, t) = (A_1 y + A_0)x - \frac{1}{2}A_1^2 y^4 + \frac{1}{6}(A_{1t} - 12A_1 A_0)y^3 + (A_{0t} - 6A_0^2)y^2 + K(t)y + L(t), \quad (44)$$

其中: $A_1(t)$ 、 $A_0(t)$ 、 $K(t)$ 、 $L(t)$ 都是关于 t 的任意函数. 值得指出的是, 经典 Lie 方法得到的第 3 种约化(文献[2]中式(4.11))只对应于 $A_1 = 0$ 时解方程(44)的一个特例.

(iiib)方程(38)~(40)的第 2 类特解为:

$$\alpha_2 = -\frac{1}{6}(y + y_0(t))^{-2}, \quad (45)$$

$$\alpha_1 = B_0(t)(y + y_0(t))^{-2} + B_1(t)(y + y_0(t))^{-3} - \frac{1}{6}y_{0t}(y + y_0(t))^{-1}, \quad (46)$$

且

$$w(y, t) = C_1(t)(y + y_0)^2 + C_2(t)(y + y_0)^{-1} - \frac{3}{2}B_0^2(y + y_0)^{-2} - \frac{1}{9}B_1^2(y + y_0)^{-8} - 3B_0B_1(y + y_0)^3 + \frac{1}{2}B_1y_{0t}(y + y_0)^4 - \frac{1}{2}B_{0t} + \frac{1}{18}(y + y_0)^5 + \frac{1}{12}y_{0tt}(y + y_0), \quad (47)$$

其中: $y_0(t)$ 、 $B_0(t)$ 、 $B_1(t)$ 、 $C_1(t)$ 、 $C_2(t)$ 都是独立于 t 的任意函数.

(iiic)方程(38)~(40)的通解可表示为:

$$\alpha_2 = -\wp(\sqrt{6}(y + y_0(t)); 0, g_3(t)), \quad (48)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 \left(B_0(t) + B_1(t) \int^y \alpha_2^{-2}(y_1, t) dy_1 + \int^y \alpha_2^{-2}(y_2, t) dy_2 \int^{y_2} (\alpha_2^2(y_1, t)) dy_1 \right), \quad (49)$$

且 w 方程是由线性方程(40)给出, 而 α_2 和 α_1 是由方程(48)和(49)给出. $y_0(t)$ 、 $g_3(t)$ 、 $B_0(t)$ 、 $B_1(t)$ 和另外 2 个关于 w 的积分函数都是关于 t 的任意函数, 且 $\wp(\tau; g_2, g_3)$ 定义的维尔斯特拉斯椭圆函数为:

$$\left(\frac{d\wp}{d\tau} \right)^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3. \quad (50)$$

$w(y, t)$ 以及由方程(48)和(49)给出的 α_1 、 α_2 满足 Lamé 方程(40). Lamé 方程解的细节可以参考文

献[16].

显然, 后 2 个子例(iiib)和(iiic)都是 KPE 的新解, 而经典的 Lie 方法还没有得到它们.

类似于 KPE 的第 3 种相似度约化, 如果我们进行变换:

$$w \rightarrow \frac{1}{6}Z_1^2(\eta)\xi^2 + \frac{1}{6}Z_1(\eta)Z_2(\eta)\xi + \frac{1}{24}Z_2^2(\eta) + \theta_1^2(\eta)q(Z, T), \quad (51a)$$

$$\theta_1 = \exp\left(-\int^y Z_1(\eta') d\eta'\right), \quad (51b)$$

$$z = \theta_1(\eta)\xi - \frac{1}{2}\int^\eta Z_2(\eta_1) d\eta_1 \cdot \exp\left(-2\int^\eta Z_2(\eta') d\eta'\right), \quad (51c)$$

$$T = \int^\eta d\eta_1 \exp\left(-2\int^\eta Z_1(\eta') d\eta'\right). \quad (51d)$$

然后将第 1 类约化方程(31)简化为通常的 Boussinesq 方程:

$$q_{zzzz} + 6q_z^2 + 6qq_{zz} + q_{\tau\tau} = 0, \quad (52)$$

其形式与经典 Lie 方法得到的约化方程相同, 但自变量 $Z_1 \neq 0$ 、 $Z_2 \neq 0$ 不同.

与第 3 种约化方法一样, 2 个任意函数 $Z_1(\eta)$ 和 $Z_2(\eta)$ 不能被其他由经典 Lie 方法引入的函数所吸收. 为了完整起见, 也可以替代该方程的精确解方程(52)(如平凡解 $q = 0$ 和单孤子解). 从最终结果方程(28)看, 当 $Z_i (i = 1, 2)$ 为 0 或者不为 0 时结果有很大的不同, 但我们不这样做.

在第 2 类约化中, 变换为:

$$w \rightarrow \frac{F(\eta)}{6}\xi + \theta_1^2(\eta)q(Z, T), \quad (53a)$$

$$\theta_1 = \exp\int^\eta F(\eta') d\eta', \quad (53b)$$

$$Z = \theta_1 \xi, \quad (53c)$$

$$T = \int^\eta \theta_1^3(\eta') d\eta', \quad (53d)$$

将关于 w 的方程(36)简化为一次微分的 KdV 方程:

$$(q_{zzz} + 6qq_z - q_\tau)_z = 0, \quad (53e)$$

除了 $F=0$ 之外, 它的形式与经典的 Lie 方法相同, 但自变量不同. 正如前面讨论的其他 2 种情况, 约束 $F=0$ (在经典 Lie 方法中)将导致一般性的丧失, 这里不再进一步讨论.

综上所述, 经典 Lie 方法得到的 KPE 的 3 种相似约化都是直接法结果的特例. 虽然它们的约化方程具有相同的形式, 但可以比经典 Lie 方法在 KPE 的解中引入一些更任意的函数.

在文献[5]中已经说明了所有可能的 KPE 的一维(即 ODEs)降低. 为了完整起见, 这里列出了主要结果.

$$(1) \quad u(x, y, t) = \theta^2(y, t)w(z) + \frac{1}{6\theta^2}((\theta_x x + \sigma_t)\theta - (\theta_y x + \sigma_y)^2), \quad (54a)$$

$$Z = Z(x, y, t) = \theta(y, t)x + \sigma(y, t), \quad (54b)$$

$$\theta_{yy} = A\theta^5, \quad (54c)$$

$$-\theta_t + \sigma_{yy} = (A\sigma + B)\theta^4, \quad (54d)$$

且 w 满足 ODE:

$$\frac{d^{(4)}}{dZ^{(4)}}w + 6\left(\frac{d}{dZ}w\right)^2 + 6w\frac{d^2}{dZ^2}w + (Az + B)\frac{d}{dZ}w + 2Aw = -(Az + B)^2, \quad (55)$$

其中: A 和 B 是任意常数. 方程(54)和(55)的所有可能的解已在文献[5]中给出.

$$(2) \quad u = \alpha(x, y, t) + \beta(x, y, t)w(Z(y, t)), (Z_y \neq 0), \quad (56)$$

$$-\beta_x Z_t + 2\beta_y Z_y + \beta Z_{yy} = \beta Z_y^2 \Gamma_a(z), \quad (57)$$

$$-\beta_{tx} + 12\alpha_x \beta_x + 6\alpha \beta_{xx} + 6\beta \alpha_{xx} + \beta_{xxxx} + \beta_{yy} = \beta Z_y^2 \Gamma_b(z), \quad (58)$$

$$6\beta_x^2 + 6\beta \beta_{xx} = \beta Z_y^2 \Gamma_c(z), \quad (59)$$

$$-\alpha_{tx} + 6\alpha_x^2 + 6\alpha \alpha_{xx} + \alpha_{xxxx} + \alpha_{yy} = \beta Z_y^2 \Gamma_d(z), \quad (60)$$

且 $w(z)$ 满足 ODE 方程:

$$\frac{d^2}{dZ^2}w + \Gamma_a(z)\frac{dw}{dz} + \Gamma_b(z)w + \Gamma_b(z)w^2 + \Gamma_d(z) = 0, \quad (61)$$

其中: $\Gamma_a, \Gamma_b, \Gamma_c, \Gamma_d$ 都是关于 z 的函数.

$$(3) \quad u = \alpha(x, y, t) + \beta(x, y, t)w(t), \quad (62)$$

$$-\beta_{tx} + 12\alpha_x \beta_x + 6\alpha \beta_{xx} + 6\beta \alpha_{xx} + \beta_{xxxx} +$$

$$\beta_{yy} = -\beta_x \Gamma_A(t), \quad (63)$$

$$6\beta_x^2 + 6\beta \beta_{xx} = -\beta_x \Gamma_B(t), \quad (64)$$

$$-\alpha_{tx} + 6\alpha_x^2 + 6\alpha \alpha_{xx} + \alpha_{xxxx} + \alpha_{yy} = -\beta_x \Gamma_C(t), \quad (65)$$

其中: $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ 是关于 t 的函数, 且 $w(t)$ 满足 ODE 方程:

$$\frac{d}{dt}w + \Gamma_A(t)w - \Gamma_B(t)w^2 + \Gamma_C(t) = 0, \quad (66)$$

其中: $\beta_x \neq 0$, 且当 $\beta_x = 0$ 时, $w(t)$ 是关于 t 的任意函数. 方程(57)~(65)的所有可能解已在文献[18]中给出.

2 结论与讨论

本文得到了将(2+1)维 KP 方程约化为 2 个变量的 PDEs 的所有可能的约化. KPE 有 3 种类型的相似约化, 它们与经典的 Lie 方法所得的结果平行. 在第 1 类约化中, 约化方程是一个变系数的 Boussinesq 方程, 它等价于第 1 类相似约化, 即经典 Lie 方法得到的具有不同自变量的 Boussinesq 方程; 在 KPE 的解中包含了比原来更多的 2 个任意函数, 仅当这 2 个任意函数消失时, 解与经典 Lie 方法的结果相同. 第 2 种相似约化方程是变系数一次微分 KdV 方程, 它可以通过因变量和自变量的一些变换转化为常系数一次微分 KdV 方程; 通过经典 Lie 方法得到的第 2 类简化问题的 KPE 解包含了一个关于 t 的任意函数. 第 3 类相似约化方程仅为二阶 PDE, 包含 3 个子例. 经典 Lie 方法得到 KPE 的第 3 类相似约化只是取第 1 个子情形的一个任意函数为 0 的特例.

综上所述, 在我们的结果中, 另外的任意函数可以包含在经典 Lie 方法所遗漏的相似约化中. 如何通过经典 Lie 方法^[2]或非经典的对称约化法^[18-19]而不是 CK 直接法来获取所有的相似约化, 尚需进一步研究.

假设式(3)中 w 与 η 无关, 或者使得式(4)和式(5)~(26)中 $\eta = \xi$ 可以直接得到式(54)~(65)的一维相似度降低的 KPE. 这些结果也可以通过再次使用 CK 直接法将这里得到的(1+1)维 PDEs 简化为 ODEs 得到.

本文介绍了 CK 直接法在 KP 方程中的应用,

这一方法还可应用于很多的非线性微分方程^[6-10]. 2000 年后, 这一方法又被进一步扩展到用于求解一些非线性微分(微分-差分)方程的条件约化, 称直接条件约化方法^[11-19].

附录: 3 种约化类型的推导

将方程(27)中取 $i=2$ 和注 2 联立, 可以得到:

$$\beta = \xi_x^2, \Gamma_2 = 1, \quad (A1)$$

将式(A1)代入式(27), 并取 $i=2$, 有:

$$\eta_x = \xi_x \Gamma_5(\xi, \eta), \quad (A2)$$

对式(A2)中 x 积分得到:

$$\begin{aligned} \eta &= \int^x \xi_x(x', y, t) \Gamma_5(\xi(x', y, t), \eta(x', y, t)) dx' + \\ &\quad \eta_0^1(y, t) = \eta_0^1(y, t) + \Gamma_5(\xi, \eta)(\xi + \eta_1(y, t)) - \\ &\quad \int^x \xi(x', y, t) [\Gamma_{5\xi}(\xi(x', y, t), \eta(x', y, t)) \cdot \\ &\quad \xi_x(x', y, t) + \Gamma_{5\eta}(\xi(x', y, t), \eta(x', y, t))] \cdot \\ &\quad \eta_x(x', y, t) dx' \equiv \Gamma_5(\xi, \eta) \xi + \eta_0(y, t), \quad (A3) \end{aligned}$$

从注 3 中的 η 可知, 如果 $\eta = \Omega(\xi, \eta(\xi, \eta_0))$ 可以取 $\eta = \eta_0$, 这意味着从式(A3)可以取:

$$\Gamma_5(\xi, \eta) \equiv 0, \quad \eta = \eta_0 = \eta_0^1(y, t), \quad (A4)$$

由于取 $i=9$, 式(A1)和(27)将变成:

$$(\ln \xi_x)_x = \frac{1}{9} \Gamma_9(\xi, \eta) \xi_x, \quad (A5)$$

认为 η 与 x 无关, 对式(A5)的 x 积分得:

$$\begin{aligned} \Omega(\xi, \eta) &\equiv \int^{\xi} \exp\left(-\frac{1}{9} \int^{\xi} \Gamma_9(\xi', \eta) d\xi'\right) d\xi' = \\ &\quad \theta(y, t)x + \sigma(y, t) \equiv \xi_0(x, y, t), \quad (A6) \end{aligned}$$

从注 3 关于 ξ 可知, 我们可以得到:

$$\begin{aligned} \Gamma_9(\xi, \eta) &\equiv 0, \\ \xi &= \xi_0 = \theta(y, t)x + \sigma(y, t), \quad (A7) \end{aligned}$$

取 $i=19$, 将式(A1)、(A4)和(A7)代入式(27), 并用注 1 可得:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{6\theta^2} (\theta(\theta_t x + \sigma_t) - (\theta_y x + \sigma_y)^2), \\ \Gamma_{19} &= 0, \quad (A8) \end{aligned}$$

根据式(A1)、(A4)、(A7)和(A8)的结论, 可得:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \Gamma_3 = \Gamma_4 = \Gamma_6 = \\ \Gamma_7 &= \Gamma_8 = \Gamma_{10} = \end{aligned}$$

$$\Gamma_{11} = \Gamma_{12} = \Gamma_{13} = \Gamma_{14} = 0, \quad (A9)$$

同理, 式(27)中剩余的方程为:

$$\begin{aligned} -\alpha_{xx} + 6\alpha_x^2 + 6\alpha\alpha_{xx} + \alpha_{yy} + \alpha_{xxxx} = \\ \theta^6 \Gamma_{16}(\xi, \eta), \quad (A10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6\theta^2 \alpha_{xx} + 2\theta_y^2 + 4\theta_y(\theta_y x + \sigma_y) + \\ \theta(\theta_{yy} x + \sigma_{yy}) = \theta^5 \Gamma_{17}(\xi, \eta), \quad (A11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3\theta\theta_t + 12\theta^2 \alpha_x + 4\theta_y(\theta_y x + \sigma_y) + \\ \theta(\theta_{yy} x + \sigma_{yy}) = \theta^5 \Gamma_{17}(\xi, \eta), \quad (A12) \end{aligned}$$

$$4\theta_y \eta_y + \theta \eta_{yy} = \theta^5 \Gamma_{18}(\xi, \eta), \quad (A13)$$

$$\eta_y^2 = \theta^4 \Gamma_{20}(\xi, \eta), \quad (A14)$$

$$-\eta_t \theta + 2(\theta_y x + \sigma_y) \eta_y = \theta^4 \Gamma_{21}(\xi, \eta), \quad (A15)$$

且除了注 4 被限定外, 所有的自由度都已确定.

为了解决式(A10)~(A15)的剩余方程, 有 2 种可能性可以进一步讨论.

(1) 当 $\Gamma_{20} \neq 0$ 时, 式(A14)可以重写成:

$$\pm \eta_t (\Gamma_{20}(\eta))^{-1/2} = \theta^2(y, t), \quad (A16)$$

对式(A16)中 y 一次积分, 并用注 4 对 η 积分, 得到:

$$\Gamma_{20} = 1, \quad (A17)$$

$$\eta_y = \theta^2, \text{ 或者 } \eta = \int^y \theta^2(y', t) dy' + \eta_0(t), \quad (A18)$$

其中: $\eta_0(t)$ 是关于 t 的任意函数.

将式(A18)代入式(A13)得到:

$$\theta_y = \frac{1}{6} \Gamma_{18}(\xi, \eta) \theta^3 \equiv Z_1(\eta) \theta^3, \quad (A19)$$

即 $\Gamma_{18} = 6Z_1$ 是一个关于 η 的任意函数, 且与 ξ 无关. 结合式(A8)和式(A19)的结果, 可得式(A11)的解为:

$$\Gamma_{16}(\xi, \eta) = \Gamma_{16}(\eta) = 6Z_1^2 + 2Z_{1\eta}, \quad (A20)$$

因为函数 η 和 θ 与 x 无关, 而且在线性形式上式(A12)和(A15)的等式左边仅依赖于 x , 故 Γ_{21} 、 Γ_{17} 的唯一可能形式为:

$$\Gamma_{21}(\xi, \eta) = Z_3(\eta) \xi + Z_2(\eta), \quad (A21)$$

$$\Gamma_{17}(\xi, \eta) = Z_4(\eta) \xi + Z_3(\eta), \quad (A22)$$

很容易确定函数 $Z_i(\eta)$ ($i=2, 3, 4, 5$), 且得到结果为:

$$\begin{aligned} Z_3 &= 2Z_1, Z_4 = 3Z_1^2 + Z_{1\eta}, \\ Z_5 &= \frac{3}{2} Z_1 Z_2 + \frac{1}{2} Z_{2\eta}, \quad (A23) \end{aligned}$$

当 η 、 σ 和 θ 满足条件时, Z_2 仍保持其任意性.

$$\sigma_y = \frac{1}{2\theta}(\eta_t + \theta^3(2Z_1\sigma + Z_2)), \quad (\text{A24})$$

或者

$$\sigma = \exp\left(\int^y \theta^2(y', t) Z_1(\eta(y', t)) dy'\right) \cdot \left(\sigma_0(t) + \int \frac{dy_1}{2\theta(y_1, t)} \cdot (\eta_t(y_1, t) + \theta^3 Z_2(\eta(y_1, t))) \cdot \exp\left(-\int^{y_1} \theta^2(y^1, t) Z_1(\eta(y^1, t)) dy^1\right)\right), \quad (\text{A25})$$

其中: $\sigma_0(t)$ 是关于 t 的任意函数.

类似地, Γ_{15} 在式(A10)中只有一种可能:

$$\Gamma_{15}(\xi, \eta) = Z_6(\eta)\xi^2 + Z_7(\eta)\xi + Z_8(\eta), \quad (\text{A26})$$

将式(A8)、(A18)、(A19)、(A25)和(A26)代入式(A10), 并比较 x^2 、 x 、 x^0 的系数, 有:

$$\alpha_{2yy} + 36\alpha_2^2 = \theta^8 Z_6, \quad (\text{A27})$$

$$\alpha_{1yy} + 36\alpha_2\alpha_1 = 2\alpha_{2t} + \theta^7(2Z_6\sigma + Z_7), \quad (\text{A28})$$

$$\alpha_{0yy} + 12\alpha_2\alpha_0 + 6\alpha_1^2 - \alpha_{1t} = \theta^6(Z_6\sigma^2 + Z_7\sigma + Z_8), \quad (\text{A29})$$

其中: α_2 、 α_1 和 α_0 均由以下定义:

$$\alpha = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0, \quad (\text{A30})$$

且

$$\alpha_2 \equiv -\frac{1}{6}\theta^4 Z_1^2, \quad (\text{A31})$$

$$\alpha_1 \equiv -\frac{1}{6}Z_1(\eta_t + 2\theta^3 Z_1\sigma + \theta^3 Z_2) + \frac{\theta t}{6\theta}, \quad (\text{A32})$$

和

$$\alpha_0 \equiv \frac{\sigma_t}{6\theta} - \frac{1}{6\theta^2} \cdot \left(\frac{1}{2\theta}\eta_t + \theta^2 Z_1\sigma + \frac{1}{2}\theta^2 Z_2\right)^2, \quad (\text{A33})$$

经过一些简单而繁琐的计算后, 可得到式(A27)~(A29)的解:

$$Z_6 = -3Z_1^4 - 4Z_1^2 Z_{1\eta} - \frac{1}{3}Z_{1\eta}^2 - \frac{1}{3}Z_1 Z_{1\eta\eta}, \quad (\text{A34})$$

$$Z_7 = -\frac{1}{3}Z_{1\eta} Z_{2\eta} - 4Z_1^2 - \frac{1}{6}Z_2 Z_{1\eta\eta} - \frac{1}{6}Z_1 Z_{2\eta\eta} -$$

$$\frac{5}{2}Z_1 Z_2 Z_{1\eta} - 3Z_1^3 Z_2 - \frac{3}{2}Z_1^2 Z_{2\eta}, \quad (\text{A35})$$

$$Z_8 = -\frac{1}{4}Z_{1\eta} Z_2^2 - \frac{3}{4}Z_1^2 Z_2^2 - \frac{3}{4}Z_1 Z_2 Z_{2\eta} -$$

$$\frac{1}{12}Z_{2\eta}^2 - \frac{1}{12}Z_2 Z_{2\eta\eta}. \quad (\text{A36})$$

现在收集了已经获得的所有结果, 在第 2 节中给出的第 1 类型的相似约化马上会出现. 从这类解的推导可以看出, 并没有为了 ξ 而用到注 4; 然而, 这个注 4 并不能修正任何函数 Z_1 和 Z_2 .

(2) 在 $\Gamma_{20}(\xi, \eta) = 0$ 情况下, 式(A14)和(A13)会导致:

$$\eta_y = 0, \quad \Gamma_{18} = 0, \quad (\text{A37})$$

且

$$\eta = \eta(t), \quad \text{或者 } t = f(\eta), \quad (\text{A38})$$

令 f 为 $\eta(t)$ 的反函数. 由式(A38)和(A15)可得:

$$\theta_y = 0, \quad (\text{A39})$$

$$-\frac{d\eta}{\Gamma_{21}(\eta)} = \theta^3 dt, \quad (\text{A40})$$

结合式(A40)的积分和注 4 对 η 积分得到:

$$\eta = \int^t \theta^3(t') dt', \quad \Gamma_{21} = -1, \quad (\text{A41})$$

式(A39)和(A8)的结果可变为:

$$\alpha = \frac{1}{6\theta^2}(\theta(\theta_t x + \sigma_t) + \sigma y^2), \quad (\text{A42})$$

将式(A39)和(A42)代入式(A11)和(A12)可得:

$$\Gamma_{16} = 0, \quad (\text{A43})$$

$$\sigma = \sigma_2(t)y^2 + \sigma_t(t)y + \sigma_0(t), \quad (\text{A44})$$

和

$$\Gamma_{17}(\eta) \equiv F(\eta), \quad \sigma_2(t) = \frac{1}{2}(\theta^4 F(\eta(t)) + \theta_t), \quad (\text{A45})$$

且 $\sigma_0(t)$ 和 $\sigma_t(t)$ 是 t 的任意函数, 其中式(A10)得到的结果为:

$$\Gamma_{15} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}F_\eta - F^2\right). \quad (\text{A46})$$

总结这种情况下的结果, 可以得到 KPE 的第 2 类相似性约化, 如式(32)~(36). 在本例中, 我们还为 η 用了注 1~3 和式(4). 剩下的注 4 中的 ξ 不能用来修正关于 η 的任意函数 $F(\eta)$.

(3) 为了得到第 3 种类型的约化, 必须讨论 $\xi_x = 0$ 的情况. 在这种情况下, 同时可以假设

$\eta_x = 0$, 否则, ξ 和 η 的交换又会导致第 1 类和第 2 类的约化. 此外, 假设 $\xi_y \neq 0$ (或 $\eta_y \neq 0$), 否则 w 将仅是一个关于 t 的函数, 这种情况已经在式(62)~(65)中给出.

在条件 $\eta_x = 0$ 和 $\xi_x = 0$ 下, 约化式(4)在式(5)~(26)中得:

$$\begin{aligned} & \beta \xi_y^2 w_{\xi\xi} + \beta \eta_y^2 w_{\eta\eta} + 2\beta \xi_y \eta_y w_{\xi\eta} + \\ & (-\beta_x \eta_t + 2\beta_y \eta_y + \beta \eta_{\eta\eta}) w_\eta + \\ & (-\beta_x \xi_t + 2\beta_y \xi_y + \beta \xi_{\eta\eta}) w_\xi + \\ & (-\beta_{tx} + 12\alpha_x \beta_x + 6\alpha \beta_{xx} + \\ & 6\alpha_{xx} \beta + \beta_{yy} + 6(\beta_x^2 + \beta \beta_{xx}) w^2 + \\ & (-\alpha_{tx} + 6\alpha_x^2 + 6\alpha \alpha_{xx} + \alpha_{yy} + \alpha_{xxx}) = 0, \end{aligned} \quad (A47)$$

当 $\xi_y \neq 0$ 时, 式(A47)成为一个 PDE, 可以写为:

$$\eta_y^2 = \xi_y^2 \Gamma_A(\xi, \eta), \quad (A48)$$

$$\eta_y = \xi_y \Gamma_B(\xi, \eta), \quad (A49)$$

$$\beta_x^2 + \beta \beta_{xx} = \beta \xi_y^2 \Gamma_C(\xi, \eta), \quad (A50)$$

$$-\beta_x \xi_t + 2\beta_y \xi_y + \beta \xi_{\eta\eta} = \beta \xi_y^2 \Gamma_D(\xi, \eta), \quad (A51)$$

$$-\beta_x \eta_t + 2\beta_y \eta_y + \beta \eta_{\eta\eta} = \beta \xi_y^2 \Gamma_E(\xi, \eta), \quad (A52)$$

$$\begin{aligned} & -\beta_{tx} + 12\alpha_x \beta_x + 6\alpha_{xx} \beta + 6\alpha \beta_{xx} + \\ & \beta_{yy} + \beta_{xxx} = \beta \xi_y^2 \Gamma_F(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (A53)$$

$$\begin{aligned} & -\alpha_{tx} + 6\alpha_x^2 + 6\alpha \alpha_{xx} + \alpha_{yy} + \alpha_{xxx} = \\ & \beta \xi_y^2 \Gamma_G(\xi, \eta). \end{aligned} \quad (A54)$$

在这种情况下, 首先考虑注 3 的 $\xi_x = 0$ 和 $\xi = \xi(y, t)$, 我们能得到 y 的特解:

$$y = y(\xi, t), \quad (A55)$$

因此

$$\begin{aligned} \eta &= \eta(y, t) = \eta(y(\xi, t), t) \equiv \\ & \eta_1(\xi, t) \equiv \eta_1(\xi, \eta_0). \end{aligned} \quad (A56)$$

根据注 3 中 η 有:

$$\eta = \eta_0 = t, \quad (A57)$$

且

$$\xi = \xi(y, t) \equiv \xi(\xi_0, \eta), \quad (A58)$$

利用注 3 中 ξ 得到:

$$\xi = y, \quad (A59)$$

将式(A57)和(A59)代入式(A52)中, 并对 y 进行一次

积分得:

$$\beta = \beta_0(y, t) \exp(-\Gamma_E(y, t)x), \quad (A60)$$

联立式(A60)和(A50)可得:

$$\begin{aligned} & 2\Gamma_E^2(y, t) \beta_0^2(y, t) \exp(-2\Gamma_E(y, t)x) = \\ & \beta_0(y, t) \exp(-\Gamma_E(y, t)x) \Gamma_C(y, t), \end{aligned} \quad (A61)$$

方程(A61)只对任意 x 成立, 有:

$$\Gamma_E(y, t) = \Gamma_C(y, t) = 0, \quad (A62)$$

现在对式(A60)使用注 2 加上 $\Gamma_E = 0$, 可得:

$$\beta = \beta_0(y, t) = 1. \quad (A63)$$

总结在本例中得到的结果, 并且将它们代入式(A48)~(A54)的剩余方程中, 在使用一次注 1 后立即对式(37)~(40)所示的 KPE 进行第 3 类相似约化.

参考文献:

- [1] Kadomtsev B B, Petviashvili V I. On the stability of solitary waves in weakly dispersing media[J]. Soviet Physics Doklady, 1970, 15:539-546.
- [2] David D, Kamran N, Levi D, et al. Symmetry reduction for the Kadomtsev-Petviashvili equation using a loop algebra[J]. Journal of Mathematical Physics, 1986, 27(5): 1225-1237.
- [3] Zakharov V E, Manakov S V, Novikov S P, et al. Theory of Solitons[M]. Moscow: Nauka, 1980.
- [4] Clarkson P A, Kruskal M D. New similarity reductions of the Boussinesq equation[J]. Journal of Mathematical Physics, 1989, 30(10):2201-2213.
- [5] Lou S Y. Similarity solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1990, 23(13):L649-L654.
- [6] Lou S Y. A note on the new similarity reductions of the Boussinesq equation[J]. Physics Letters A, 1990, 151(3/4): 133-135.
- [7] Lou S Y. Generalized Boussinesq equation and KdV equation—Painlevé properties, Bäcklund transformations and Lax pairs[J]. Scientia Sinica, 1991, 34:1098-1108.
- [8] 楼森岳. 一个具有任意函数的完全可积模型及其对称性约化[J]. 科学通报, 1991, 38(13):981-984.
- [9] Lou S Y, Li H. Similarity analysis for dispersive wave equations in shallow water[J]. Communications in Theoretical Physics, 1992, 18(2):165-170.
- [10] Lou S Y. Similarity solutions of dispersive long-wave equations in two space dimensions[J]. Mathematical

- Methods in the Applied Sciences, 1995, 18(10):789-802.
- [11] Lou S Y, Tang X Y, Lin J. Similarity and conditional similarity reductions of a (2+1)-dimensional KdV equation via a direct method[J]. Journal of Mathematical Physics, 2000, 41(12):8286-8303.
- [12] Lou S Y, Tang X Y. Conditional similarity reduction approach: Jimbo-Miwa equation[J]. Chinese Physics, 2001, 10(10):897-901.
- [13] Tang X Y, Lou S Y. Conditional similarity solutions of (2+1)-dimensional general nonintegrable KdV equation [J]. Communications in Theoretical Physics, 2002, 37(2): 139-144.
- [14] Tang X Y, Lin J. Conditional similarity reductions of Jimbo-Miwa equation via the classical Lie group approach[J]. Communications in Theoretical Physics, 2003, 39(1):6-8.
- [15] Tang X Y, Qian X M, Lin J, et al. Conditional similarity reductions of the (2+1)-dimensional KdV equation via the extended Lie group approach[J]. Journal of the Physical Society of Japan, 2004, 73(6):1464-1475.
- [16] Tang X, Qian X, Ding W. A differential-difference Kadomtsev-Petviashvili family possesses a common Kac-Moody-Virasoro symmetry algebra[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2005, 23(4):1311-1317.
- [17] Ince E L. Ordinary Differential Equations[M]. New York: Dover, 1956.
- [18] Bluman G W, Cole J D. The general similarity solution of the heat equation[J]. Journal of Mathematics and Mechanics, 1969, 18:1025-1042.
- [19] Levi D, Winternity P. New similarity reductions of the Boussinesq equation[J]. Journal of Mathematical Physics, 1989, 22:2915-2928.

Similarity reductions of the KP equation using a direct method

LI Jiaheng, LI Biao *

(School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: The direct method developed by Clarkson and Kruskal is a very efficient method to solve the similarity reduction of nonlinear differential equations. In this paper the Kadomtsev-Petviashvili (KP) equation is taken as an example to simplify KP equation into three types of (1+1) dimensional partial differential equations using CK direct method. These three partial differential equations are equivalent to the three similar reduction equations with different independent variables obtained through the classical Lie method. The solution to the KP equation contains more arbitrary functions which the classical Lie method lacks. For example, the third type of reduction obtained using the direct method can be divided into three subcases, while the third type of solution to the KP equation obtained using the classical Lie method serves as a special case of a subcase of the result derived in this work.

Key words: similarity reduction; KP equation; CK direct method; (1+1)-dimensional partial differential equation; Lie method

(责任编辑 史小丽)