

通过 Painlevé 分析从低维模型中寻找高维可积模型

王晓波, 贾 曼, 楼森岳*

(宁波大学 物理科学与技术学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 将 Painlevé 方法推广到更一般的形式, 可以从给定的低维可积模型中得到无穷多个新的可积模型. 新的可积模型与原模型相比都是较高维的, 它们保持保角不变性和 Painlevé 性质. 本文主要以 KdV、NLS 和 KP 方程为例, 运用 WTC 法、截断展开、领头项分析等方法, 给出了(3+1)维可积模型的具体形式.

关键词: Painlevé 分析; 高维可积模型; 低维可积模型

中图分类号: O415

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2020) 05-0114-07

现代孤子理论在物理领域应用广泛, 例如场论^[1]、凝聚态物理^[2]、流体力学^[3]、等离子体物理^[4]、光学^[5]、粒子与核物理^[6]、宇宙学^[7]、地球物理学^[8]、行星和空间科学^[9], 还有其他学科技术领域, 比如通讯^[10]、化学^[11]等. 真实的物理空间是(3+1)维的, 然而几乎所有的可积模型只有(1+1)和(2+1)维的. 许多物理学家和数学家一直在努力寻找一些特殊的(3+1)维可积模型^[12-13], 但是没有什么进展. 除了(2+2)维自对偶 Yang-Mills 方程^[12]外, 没有人知道真正意义的 $(n+1)$ 维可积模型 $(n \geq 3)$.

经典和非经典 Lie 方法^[14-16]可以将非线性偏微分方程(PDE)约化为一些常微分方程(ODE), 这种方法求解非线性 PDE 最有效的方法之一. 从对(1+1)和(2+1)维可积模型的研究中了解到, 常见的(1+1)和(2+1)维可积模型都可以做 ODE 的约化, 如 Riccati 方程和 Painlevé I-VI 方程^[17], 它们都是常见的可积(1+1)和(2+1)维 PDE. 事实表明, 一切可积模型都可以看作是一些具有 Painlevé 性质的 ODE 的变形, 这些变形都是不同的. 例如一些(1+1)和(2+1)维可积 sine-Gordon 方程和 Mikhailov-Dodd-Bullough 方程就可看作是个简单的 Riccati 方程^[18]变形. 所以相信高维模型可以从低维模型中获得. 从低维模型中获得高维模型的方法有很多, 例如

楼可积性^[19-26]从低维可积系统的高维形变^[27-30]和 Kac-Moody-Virasoro 可积系统^[31-37].

本文尝试提出一种可能的办法, 通过 Weiss、Tabor 和 Carnevale (WTC)^[38]提出的拓展形式的 Painlevé 分析, 从低维模型中得到高维可积模型. Painlevé 分析通常用来研究奇异性、Bäcklund 变换(BT)、对称性、双线性化和可积性以及某些类型的精确 Painlevé 解^[38-40], 然而还没有人使用 Painlevé 分析来得到新的可积模型.

1 总体思想和假设

对于给定的 n 维 n 阶 PDE:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, t, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_1 x_2 \dots x_n}) = 0, \quad (1)$$

如果该模型的解关于任意奇异流形 $\varphi \equiv \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0$ 所有的可动奇点是极点, 那么该模型具有 Painlevé 性质(P 性质). 换言之, 通过把(1)的解在奇异流附近展开, 就可以得到

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} u_j \varphi^{j+\alpha}, \quad (2)$$

式中: u_j 为个数大于 $N-1$ 的任意函数; α 为负整数. 将式(2)代入(1), 所有的展开系数 u_j 可以写成

$$u_j = f_j(x_i, \varphi_{x_i}, \varphi_{x_1 x_2}, \dots, u_{j_1}, u_{j_2}, \dots, u_{j_{N-1}}), \\ j \neq j_1, \dots, j_{N-1}, \quad (3)$$

收稿日期: 2020-05-11.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journal.lg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(11975131, 11675084); 宁波市自然科学基金(2015A610159); 宁波大学王宽诚幸福基金.

第一作者: 王晓波(1993-), 女, 山西忻州人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 非线性物理. E-mail: 1403421943@qq.com

*通信作者: 楼森岳(1957-), 男, 浙江宁波人, 教授, 主要研究方向: 非线性物理. E-mail: lousenyue@nbu.edu.cn

式中, $u_{j_1}, \dots, u_{j_{N-1}}$ 为任意函数, 取

$$u_j = 0, (j > -\alpha), \quad (4)$$

可以得到方程(1)的 BT, 也就是说, 如果 $u_{-\alpha}$ 是方程(1)的一个解, 那么式(2)与(4)给出的截断展开后的 u 也是方程(1)的一个解. 而且, 如果 $u = 0$ 是方程(1)的一个解, 那么孤子解就可以从 BT 和 $u_{-\alpha} = 0$ 中得到. 通常使用截断展开来讨论 Bäcklund 变换或者精确解时, 不会去讨论方程 $u_j = 0, (j \geq -\alpha)$ 的任何性质, 也就是说

$$f_j \equiv f_j(x_i, \varphi_{x_i}, \varphi_{x_{i+1}x_{i+2}}, \dots, u_{j_1} = 0, \\ u_{j_2} = 0, \dots, u_{j_{N-1}} = 0) = 0, j \geq -\alpha. \quad (5)$$

因为当使用截断展开法研究方程(1)的可积性时, 方程(5)对于不同的 j 必须是一致的, 所以认为方程(5)和 $u_j (j \geq -\alpha)$ 的一些组合可能是可积的.

由方程(5)得到的可积模型具有与原模型(1)相同的维数. 为了从方程(1)得到一些高维可积模型, 首先, 在高维中嵌入低维可积模型(1), 换句话说, 考虑 u 不仅取决于显性自变量 $\{x_1, \dots, x_n, t\}$, 还与一些隐性自变量 $\{x_{n+1}, \dots, x_{n+m}\}$ 有关; 其次, Painlevé 展开式(2)应该扩展为另一种求和形式, 使得隐性自变量 $\{x_{n+1}, \dots, x_{n+m}\}$ 在新的展开系数中明确地表示出来, 同样数量的任意函数仍然包含在新的展开形式中. 第一步非常简单, 因为无穷多个积分常数(内部参数)可以包含在任意给定的 PDE 的解中, 可以把这些参数作为新的自变量. 由于奇异流形 ϕ 是任意的, 第二步可以实现. 例如, 取

$$\xi \equiv \left(\frac{\varphi_{x_{n+1}}}{\varphi} - \frac{\varphi_{x_{n+1}x_{n+1}}}{2\varphi_{x_{n+1}}} \right)^{-1} \quad (6)$$

为新的展开变量. 也就是说, 得到(2)的展开式为

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} u'_j \xi^{j+\alpha}, \quad (7)$$

式中, 任意的 ξ 和 $u'_{j_1}, u'_{j_2}, \dots, u'_{j_{N-1}}$ 以及相同整数 $j_1, j_2, \dots, j_{N-1}$ 和 α 与式(2)中相应量的地位是相同的. 从式(6)中可以很容易证明下列恒等式:

$$\xi_{x_i} = P_i - P_{ix_{n+1}} \xi + \frac{1}{2} (P_i S + P_{ix_{n+1}x_{n+1}}) \xi^2, \\ i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad x_0 \equiv t, \quad (8)$$

式中,

$$P \equiv \frac{\varphi_{x_i}}{\varphi_{x_{n+1}}},$$

$$S \equiv \frac{\varphi_{x_{n+1}x_{n+1}x_{n+1}}}{\varphi_{x_{n+1}}} - \frac{3}{2} \left(\frac{\varphi_{x_{n+1}x_{n+1}}}{\varphi_{x_{n+1}}} \right)^2 \equiv \{\varphi; x_{n+1}\}. \quad (9)$$

在 Möbius 变换下,

$$\varphi \rightarrow \frac{a+b\varphi}{c+d\varphi}, \quad ad \neq bc \quad (10)$$

都是不变的. 易看出式(7)中 u'_j 的展开系数都是保角不变的, 因为它们都是 P_i 、 S 和 $\{u'_{j_1}, u'_{j_2}, \dots, u'_{j_{N-1}}\}$ 的函数. 尽管原方程(1)不是明显地依赖于 x_{n+1} , 但是在这个方程的展开系数 u'_j 的表达式中已经包含新的独立变量 x_{n+1} . 另一方面, 保角不变性在可积理论中是很重要的. 例如, 从 Korteweg-de Vries (KdV) 和 非线性 Schrödinger (NLS) 方程的保角不变性出发, 可以得到无穷多个对称、Darboux 变换、sine-Gordon 展开等^[41]. 从一个很普通的保角不变形式出发, 可以用 P 性质^[42]得到多个可积模型. 现在可以合理地假设, 如果方程(1)是可积的, 那么对 $u'_j = 0, j \geq -\alpha$, 消去式(7) Painlevé 展开的系数得到的方程是可积的.

虽然尚未证实这一假设或者说假设并不完全正确, 但是仍然可以从给定的假设中对一些低维可积模型和 j 比较小的时候的检查中获得各种高维可积模型. 有趣的是, 如果给定的方程(1)是(2+1)维的, 那么获得的假设可积模型就是(3+1)维的. 此外, 无论给定模型的维数是多少, 该假设都可以多次用于得到任意维数的可积模型. 更具体地说, 可以从 KdV、非线性 NLS 和 Kadomtsev-Petviashvili (KP) 方程中得到一些(3+1)维模型.

2 从 NLS 和 KdV 方程中得到(3+1)维模型

NLS 方程 ($x_0 = t, x_1 = x, x_2 = y$) 是被众多物理学家和数学家研究的重要的可积物理模型之一:

$$iu_t + u_{xx} - 4u^2v = 0, \\ -iv_t + v_{xx} - 4v^2u = 0. \quad (11)$$

因为是非线性薛定谔方程组, 所以采用耦合的方法来计算. 为了方便研究耦合的非线性薛定谔方程组, 用 $u = P + iQ$ 和 $v = N + iM$ 定义的 4 个实函数 P 、 Q 、 N 和 M 重新计算, 因此可以得到以下 4 个方程:

$$M_t + N_{xx} - 4N^2P + 8NMQ + 4M^2P = 0, \quad (12)$$

$$-Q_t + P_{xx} - 4P^2N + 8PQM + 4Q^2N = 0, \quad (13)$$

$$-N_t + M_{xx} - 4N^2Q - 8PNM + 4M^2Q = 0, \quad (14)$$

$$P_t + Q_{xx} - 4P^2M - 8PQN + 4Q^2M = 0. \quad (15)$$

为了从 NLS 方程中获得一些重要的(2+1)维模型, 使用以下新的展开重新研究了模型的 P 性质:

$$P = \sum_{j=0}^{\infty} p'_j \xi^{j+\alpha},$$

$$Q = \sum_{j=0}^{\infty} q'_j \xi^{j+\alpha},$$

$$M = \sum_{j=0}^{\infty} m'_j \xi^{j+\alpha},$$

$$N = \sum_{j=0}^{\infty} n'_j \xi^{j+\alpha},$$

并且考虑到 P 、 Q 、 M 、 N 不仅是 $\{x, t\}$ 的函数, 还是 y 的函数. 通常情况下^[38], 通过对领头项的分析, p'_0 、 q'_0 、 n'_0 和 m'_0 中的两个是任意的, 没有任何参数约束. 为了运算简单, 可取 $m'_0 = \frac{P_1}{2}$, $n'_0 = \frac{P_1}{2}$, 得

$$\begin{aligned} \alpha &= -1, \quad m'_0 = \frac{P_1}{2}, \quad n'_0 = \frac{P_1}{2}, \\ p'_0 &= \frac{P_1}{2}, \quad q'_0 = -\frac{P_1}{2}. \end{aligned} \quad (16)$$

将式(7)、(8)和(16)代入方程组(12)~(15)中可以得到 u'_j 系数的递推关系式

$$(j+1)^2(j-4)^2(j-3)^2j^2u'_j = f'_j(S, P_i, P_{ix}, \dots, u'_0, \dots, u'_{j-1}) \equiv f'_j, \quad (17)$$

式中, f'_j 是 $u'_0, \dots, u'_{j-1}$ 保角不变 P_i 、 S 和它们的微分项的复杂函数. 经计算, p'_j 、 q'_j 、 m'_j 和 n'_j 前两项可以写成

$$\begin{aligned} m'_1 &= -\frac{P_{1y}P_1 + P_{1x} - P_0}{4P_1}, \\ n'_1 &= -\frac{P_{1y}P_1 + P_{1x} + P_0}{4P_1}, \\ p'_1 &= -\frac{P_{1y}P_1 + P_{1x} + P_0}{4P_1}, \\ q'_1 &= \frac{P_{1y}P_1 + P_{1x} - P_0}{4P_1} \end{aligned} \quad (18)$$

和

$$\begin{aligned} m'_2 &= -\frac{1}{24P_1^3}(-2SP_1^4 - 2P_1^3P_{1yy} + P_{1y}^2P_1^2 + \\ &\quad 2P_{1x}P_1P_{1y} - 6P_0P_1P_{1y} + 6P_1^2P_{0y} - 2P_1^2P_{1xy} + \\ &\quad 3P_{1x}^2 - 6P_{1x}P_0 + P_0^2 + 6P_{1t}P_1 - 2P_{1xx}P_1), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} n'_2 &= -\frac{1}{24P_1^3}(-2SP_1^4 - 2P_1^3P_{1yy} + P_{1y}^2P_1^2 + \\ &\quad 2P_{1x}P_1P_{1y} + 6P_0P_1P_{1y} - 6P_1^2P_{0y} - 2P_1^2P_{1xy} + \\ &\quad 3P_{1x}^2 + 6P_{1x}P_0 + P_0^2 - 6P_{1t}P_1 - 2P_{1xx}P_1), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} p'_2 &= -\frac{1}{24P_1^3}(-2SP_1^4 - 2P_1^3P_{1yy} + P_{1y}^2P_1^2 + \\ &\quad 2P_{1x}P_1P_{1y} + 6P_0P_1P_{1y} - 6P_1^2P_{0y} - 2P_1^2P_{1xy} + \\ &\quad 3P_{1x}^2 + 6P_{1x}P_0 + P_0^2 - 6P_{1t}P_1 - 2P_{1xx}P_1), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} q'_2 &= \frac{1}{24P_1^3}(-2SP_1^4 - 2P_1^3P_{1yy} + P_{1y}^2P_1^2 + \\ &\quad 2P_{1x}P_1P_{1y} - 6P_0P_1P_{1y} + 6P_1^2P_{0y} - 2P_1^2P_{1xy} + \\ &\quad 3P_{1x}^2 - 6P_{1x}P_0 + P_0^2 + 6P_{1t}P_1 - 2P_{1xx}P_1), \end{aligned} \quad (22)$$

上式是由关系式(9)借助软件 Maple、Mathematic 得出的. 很容易证明式(17) $j=0, 3, 4$ 的 3 个共振条件都是满足的. NLS 方程的 P 性质是在新配置下重新获得的. 上式计算结果是一样的, 可以只讨论一种. 因为直接用式(19)去运算, 运算结果不显含 y , 这里采用式(18)和(19)的组合形式.

现在利用这一假设, 可能得到一系列的可积模型,

$$f'_j = 0, \quad j = 1, 2, 5, 6, \dots, \quad (23)$$

由于在 $j=0, 3, 4$ 的共振条件都满足, 这些项会消失, 所以很难证明整体的可积性. 只能验证式(23)在 j 比较小的时候的可积性. 当 $j=5$ 时, 将式(9)代入式(23), 可以发现 $u'_5=0$ 时的可积性是显然的. 因为原始的(1+1)维 NLS 方程的 Schwarz 形式也是这样的. 尽管可以验证式(23) $j=6$ 时的 P 性质, 但将式(9)代入式(23) ($j=6$) 是很复杂的, 很难把它表示出来. 所以只讨论 $j=2$ 的情况.

将 $j=2$ 和式(9)代入式(23)中, 得到一个非平凡的(2+1)维模型

$$\begin{aligned} &-6\varphi_x^4\varphi_{yy} - 6\varphi_t\varphi_x^2\varphi_y^2 + 6\varphi_x^2\varphi_y^2\varphi_{xx} - 6\varphi_x\varphi_y^3\varphi_{xt} + \\ &\quad 2\varphi_x\varphi_y^3\varphi_{xxx} - \varphi_y^3\varphi_t^2 + 6\varphi_y^3\varphi_t\varphi_{xx} - \\ &\quad 3\varphi_y^3\varphi_{xx}^2 = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

为了证明式(24)的可积性, 先将式(24)变换成一个变量形式, 然后在新配置中证明它的 P 性质. 式(24)为五线性形式, 证明多线性方程的 P 性质要比证明非线性形式的 P 性质更困难. 通过指数变换

$$\phi = e^f,$$

可以得到式(24)的非齐次形式:

$$\begin{aligned}
& -f_x^4 f_y^3 - 6f_x^4 f_{yy} - 6f_t f_x^2 f_y^2 + 6f_x^2 f_y^2 f_{xx} - \\
& 6f_x f_y^3 f_{xt} + 2f_x f_y^3 f_{xxx} - f_y^3 f_t^2 + 6f_y^3 f_t f_{xx} - \\
& 3f_y^3 f_{xx}^2 = 0.
\end{aligned} \quad (25)$$

将式(25)通过对领头项的分析, 发现 Painlevé 展开中没有代数极点(式(2)中的 $\alpha=0$), 让 Painlevé 展开式中包含代数极点, 考虑最简单的变换

$$\{f_x = U, f_y = V, f_t = G\}, \quad (26)$$

将式(26)代入式(25), 可以得到式(24)的等价方程组:

$$\begin{aligned}
& -U^4 V^3 - 6U^4 V_y - 6GU^2 V^2 + 6U^2 V^2 U_x - \\
& 6UV^3 G_x + 2UV^3 U_{xx} - V^3 G^2 + 6V^3 GU_x - \\
& 3V^3 U_x^2 = 0,
\end{aligned} \quad (27)$$

$$V_t = G_y, \quad U_t = G_x, \quad (28)$$

方程(28)是式(26)转换的一致条件. 证明系统(27)和(28)的 P 性质, 通常使用传统的 WTC 法^[38]或者之前提出的形式展开. 使用 WTC 法可以得到一些在(2+1)维和(3+1)维都可积的模型. 所以再次使用展开法, 展开 U, V 和 G .

$$\begin{aligned}
U &= \sum_{j=0}^{\infty} U_j \xi^{j+\alpha'_1}, \\
V &= \sum_{j=0}^{\infty} V_j \xi^{j+\alpha'_2}, \\
G &= \sum_{j=0}^{\infty} G_j \xi^{j+\alpha'_3},
\end{aligned} \quad (29)$$

式中, ξ 是由式(6) $n=2$ 给出的, $x_0 = t$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $\alpha'_1 = \alpha'_2 = \alpha'_3 = -1$.

$$U_0 = \pm P_1, \quad V_0 = \pm P_2, \quad G_0 = \pm P_0, \quad (30)$$

可以通过对领头项分析和 $n=2$ 的关系式(8)来确定.

式(29)取 $\alpha'_i = -1$, 将式(30)和(8)代入式(27)和(28), 可以看到在 $j=-1, 1, 1, 1$ 处所有需要的 4 个共振都被确定下来了. $j=1$ 时的共振与 ξ 的取值是相关的. $j=1$ 的共振条件可以写为

$$\begin{aligned}
& -4V_0^2 U_0^2 U_1 + 4V_0^2 U_1 P_1^2 - 3V_0 U_0^3 V_1 + \\
& 3V_0 U_0 V_1 P_1^2 + 6U_0^3 P_2 - 2V_0^2 U_0 P_{1x} + \\
& 2P_1^2 V_0^2 U_{0x} - 6V_0 U_0^2 P_1 = 0,
\end{aligned} \quad (31)$$

$$U_0 P_{0z} - G_0 P_{1z} + U_{0t} - G_{0x} = 0, \quad (32)$$

$$V_0 P_{0z} - G_0 P_{2z} - G_{0y} + V_{0t} = 0. \quad (33)$$

由式(30)和 $n=2$ 的式(9)很容易看出式(31)~(33)的

共振条件是满足的. 也就是说, 4 个任意系数 ξ, V_1, U_1 和 G_1 已经包括在式(29)的展开式中. 因为式(27)是二阶 PDE 而式(28)中的两个方程是一阶 PDE, 则要求在 Painlevé 展开式(29)中系数只需要 4 个. 因此方程系统(27)和(28)具有 P 性质, 而式(23)是一个 (2+1)维可积模型, 这就意味着它具有保角不变性, 而且拥有 P 性质的形式.

将该假设进一步应用于系统(27)和(28)中, 得到具有 P 性质的(3+1)维模型. 取 $U_2 = V_2 = G_2 = 0$, 可以得到

$$\begin{aligned}
& 2V_0^3 U_0^2 P_{1xz} - V_0^3 U_0^2 P_{1z}^2 + 2U_0 V_0^3 U_{0xx} - 6U_0 V_0^3 G_{0x} - \\
& 6V_0 U_0^4 P_{2z} - V_0^3 G_0^2 + 6V_0^2 P_{1z} U_0^3 + 6U_{0x} V_0^3 G_0 + \\
& 6U_{0x} V_0^2 U_0^2 - 6U_0^2 V_0^2 G_0 - V_0^3 U_0^2 S P_1^2 - \\
& 3V_0^3 U_0^2 - 6U_0^4 V_{0y} - 2V_0^3 P_{1z} U_0 U_{0x} - \\
& P_1 V_0^3 U_0^2 P_{1zz} = 0.
\end{aligned} \quad (34)$$

将式(8)和(9)代入式(34)可得

$$\begin{aligned}
& -12\phi_z^4 \phi_{yy} \phi_x^4 - 12\phi_z^2 \phi_y^2 \phi_t \phi_z^4 + 12\phi_z^4 \phi_x^2 \phi_y^2 \phi_{xx} - \\
& 12\phi_z^4 \phi_x \phi_y^3 \phi_{xt} + 4\phi_z^4 \phi_x \phi_y^3 \phi_{xxx} - 2\phi_y^3 \phi_t^2 \phi_z^4 + \\
& 12\phi_z^4 \phi_y^3 \phi_t \phi_{xx} - 6\phi_z^4 \phi_y^3 \phi_{xx}^2 - 6\phi_z^2 \phi_{xxz} \phi_x^3 \phi_y^3 + \\
& 12\phi_z \phi_{xz} \phi_{zz} \phi_x^3 \phi_y^3 - 3\phi_{zz}^2 \phi_x^4 \phi_y^3 = 0.
\end{aligned} \quad (35)$$

很明显式(35)是一个(3+1)维的可积模型, 其 P 性质可以用相同的方法证明, 这里省略了推导过程的细节以及 P 性质的证明.

接下来讨论 KdV 的情况, KdV 方程 ($x_0 = t$, $x_1 = x, x_2 = y$)

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (36)$$

在物理领域应用十分广泛. 以相同的思想来研究 KdV 方程, 首先使用一个新的式(7)的展开重新研究模型的 P 性质, 通过对领头项的分析^[38]可以得到

$$\alpha = -2, \quad u'_0 = -2P_1^2. \quad (37)$$

将式(7)、(8)和(37)代入式(36)中, 可以得到 u'_j 系数的递推关系式:

$$\begin{aligned}
& (j+1)(j-4)(j-6)u'_j = \\
& f'_j(S, P_i, P_{ix}, \dots, u'_0, \dots, u'_{j-1}) \equiv f'_j.
\end{aligned} \quad (38)$$

通过计算可以得到 u'_2 的关系式

$$\begin{aligned}
u'_2 &= -\frac{1}{6P_1^2} (4P_1^4 S + 4P_1^3 P_{1yy} + P_1^2 P_{1y}^2 + 4P_1^2 P_{1xy} + \\
& 2P_1 P_{1y} P_{1x} + 4P_1 P_{1xx} + P_1 P_0 - 3P_{1x}^2),
\end{aligned} \quad (39)$$

将式(39)的结果运用到式(5)的假设上,再通过指数变换可以得到

$$\begin{aligned} & -2f_x^4 f_y^4 + 4f_{xx} f_x f_y^4 - 3f_{xx}^2 f_y^4 - 6f_{xx} f_x^2 f_{yy} f_y^2 + \\ & 3f_x^4 f_{yy}^2 + f_x f_y^4 f_t = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

考虑最简单的变换

$$\{f_x = U, f_y = V, f_t = G\}, \quad (41)$$

将式(41)代入式(40),可以得到方程组:

$$\begin{aligned} & -2U^4 V^4 + 4U_{xx} U V^4 + 3U^4 V_y^2 - 6U_x U^2 V_y V^2 + \\ & U V^4 G - 3U_x^2 V^4 = 0, \end{aligned} \quad (42)$$

$$U_t = G_x, V_t = G_y, \quad (43)$$

再次使用展开法,展开 U 、 V 和 G , 通过领头项分析可以得到

$$U_0 = \pm P_1, V_0 = \pm P_2, G_0 = \pm P_0, \quad (44)$$

容易计算出共振点在 $j = -1, 1, 1, 1$ 处, $j = -1$ 时的共振与 ξ 的取值是有关的. $j = 1$ 的共振条件可以写为

$$\begin{aligned} & 10P_1^2 U_0 V_0 V_1 + 4P_1^2 U_1 V_0^2 - 6P_1 P_2 U_0^2 V_1 - \\ & 6P_1 P_2 U_0 U_1 V_0 - 3P_1 P_{1z} U_0 V_0^2 + 3P_1 P_{2z} U_0^2 V_0 + \\ & 6P_2^2 U_0^2 U_1 + 3P_2 P_{1z} U_0^2 V_0 - 3P_2 P_{2z} U_0^3 - \\ & 4U_0^3 V_0 V_1 - 4U_0^2 V_0^2 U_1 - 2P_{1x} U_0 V_0^2 = 0, \end{aligned} \quad (45)$$

$$-G_0 P_{1z} + U_0 P_{0z} = 0, \quad (46)$$

$$-G_0 P_{2z} + P_{0z} V_0 = 0. \quad (47)$$

易证实式(45)~(47)的共振条件是满足的. 经分析, 方程系统(42)和(43)具有 P 性质, 而式(40)是一个 (3+1)维可积模型, 这就意味着它具有保角不变性, 而且拥有 P 性质.

将该假设进一步应用于系统(42)和(43)中, 得具有 P 性质的(3+1)维模型. 取 $U_1 = V_1 = G_1 = 0$, 可以得到

$$\begin{aligned} & 2P_1^3 P_2^2 S - 3P_1^3 P_{2z}^2 + 2P_1^2 P_2^2 P_{1zz} + 6P_1^2 P_2 P_{1z} P_{2z} - \\ & P_1 P_2^2 P_{1z}^2 - 4P_1 P_2^2 P_{1xz} - P_2^2 P_0 = 0. \end{aligned} \quad (48)$$

将式(8)和(9)代入式(48)可得

$$\begin{aligned} & -\phi_z^2 \phi_t \phi_z^4 - 4\phi_z^3 \phi_x \phi_y \phi_{xxz} + 4\phi_z^2 \phi_{xz} \phi_x \phi_y^2 \phi_{xx} + \\ & 3\phi_z^2 \phi_{xz} + 6\phi_z^2 \phi_{xz} \phi_x^2 \phi_y \phi_{yz} + 6\phi_z^2 \phi_{xxz} \phi_x^2 \phi_y^2 - \\ & 3\phi_z^2 \phi_x^3 \phi_{yz} - 16\phi_z \phi_{zz} \phi_{xz} \phi_x^2 \phi_y^2 + \\ & 3\phi_{zz}^2 \phi_x^3 \phi_y^2 = 0. \end{aligned} \quad (49)$$

很容易证明式(49)是一个(3+1)维的可积模型, 其 P 性质可以用相同的方法被证明. 使用经典和非经典的 Lie 方法, 可以从式(49)中约化出一些(2+1)

维可积模型.

采用同样的方法, 可以从其他低维系统中得到许多高维可积系统, 例如, 从 KP 方程中求得的 Painlevé 可积模型^[20]

$$\begin{aligned} & 8\phi_z^4 \phi_x \phi_{x4}^3 \phi_{xx} \phi_{xx4} + 4\phi_z^4 \phi_x^2 \phi_{x4}^2 \phi_{xx} \phi_{x4x4} - 3\phi_z^4 \phi_{x4}^4 \phi_{xx}^2 + \\ & 3\phi_{x4}^4 \phi_{x4}^4 \phi_{zz}^2 - 6\phi_z^2 \phi_x^2 \phi_{x4}^4 \phi_{xx} \phi_{zz} + \phi_z^4 \phi_t \phi_{x4}^4 \phi_x - \\ & 2\phi_x^4 \phi_z^2 \phi_{x4x4x4} \phi_{x4} - 4\phi_z^4 \phi_x^2 \phi_{xx4} \phi_{x4}^2 + \\ & 3\sigma^2 \phi_y^2 \phi_z^2 \phi_{x4}^4 + \phi_x^4 \phi_z^4 \phi_{x4x4}^2 = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

3 总结与讨论

本文将低维可积模型嵌入高维中, 并将标准 WTC Painlevé 展开扩展到更一般的形式, 使新的展开系数是保角不变的, 提出了从已知的低维中得到更高维模型的假设, 从 KP、NLS 和 KdV 方程出发, 明确给出了具有 P 性质和保角不变性的(3+1)维模型. 虽然这一假设是建立在原模型可积这一事实基础上, 得到的方程是通过消去具有保角不变性的一致的 Painlevé 展开系数而得到的, 但是仍然需要一个一个地验证所得模型的可积性, 因为尚未严格证明假设. 即使如此, 仍然从这一假设中得到了许多高维的 Painlevé 可积模型, 并且还没有发现反例.

采用经典和非经典 Lie 方法或直接法^[14-16], 将高维模型简化为一些低维模型. 现在知道也可以从低维模型中得到高维模型.

由于实际物理空间是(3+1)维的, 且不知道(3+1)维孤子解, 因此本文得到的 Painlevé 可积模型需要进一步研究.

参考文献:

- [1] Dolan L. Gauge symmetry in background charge conformal field theory[J]. Nuclear Physics B, 1997, 489(1/2):245-263.
- [2] Loutsenko I, Roubtsov D. Critical velocities in exciton superfluidity[J]. Physical Review Letters, 1997, 78(15): 3011-3014.
- [3] Tajiri M, Maesono H. Resonant interactions of drift vortex solitons in a convective motion of a plasma[J]. Physical Review E, 1997, 55(3):3351-3357.
- [4] Das G C, Sarma J, Uberoi C. Explosion of soliton in a multicomponent plasma[J]. Physics of Plasmas, 1997, 4(6):2095-2100.

- [5] Gedalin M, Scott T C, Band Y B. Optical solitary waves in the higher order nonlinear Schrödinger equation[J]. Physical Review Letters, 1997, 78(3):448-451.
- [6] Weigel H, Gamberg L, Reinhardt H. Polarized nucleon structure functions within a chiral soliton model[J]. Physical Review D, 1997, 55(11):6910-6923.
- [7] Chiueh T, Woo T P. Discoid solitons and solitary wave trains in an expanding collisionless local universe[J]. Physical Review E, 1997, 55(1):1048-1059.
- [8] Huang G L, Wang D Y, Wu D J, et al. The eigenmode of solitary kinetic Alfvén waves observed by Freja satellite [J]. Journal of Geophysical Research: Space Physics, 1997, 102(A4):7217-7224.
- [9] Das G C, Gogoi M, Deka P. Characteristic aspects of the stability of Kadomtsev-Petviashvili solitary waves in plasmas[J]. Planetary and Space Science, 1994, 42(11):993-999.
- [10] Niiyama A, Koshiba M. 3-dimensional beam propagation analysis of nonlinear optical fibers[J]. IEICE Transactions on Communications, 1997, 80(4):522-527.
- [11] Kalinikos B A, Kovshikov N G, Patton C E. Decay Free microwave magnetic envelope soliton pulse trains in yttrium iron garnet thin films[J]. Physical Review Letters, 1997, 78(14):2827-2830.
- [12] Ablowitz M J, Clarkson P A. Solitons Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
- [13] Fokas A S. Inverse Scattering of first-order systems in the plane related to nonlinear multidimensional equations[J]. Physical Review Letters, 1983, 51(1):3-6.
- [14] Bluman G W, Kumei S. Symmetries and Differential Equations[M]. New York: Springer, 1989.
- [15] Clarkson P A, Kruskal M D. New similarity reductions of the Boussinesq equation[J]. Journal of Mathematical Physics, 1989, 30(10):2201-2213.
- [16] Lou S Y. Similarity solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1990, 23(13):L649-L654.
- [17] Ramani A, Grammaticos B, Bountis T. The Painlevé property and singularity analysis of integrable and non-integrable systems[J]. Physics Reports, 1989, 180(3):159-245.
- [18] Lou S Y. Deformations of the Riccati equation by using Miura-type transformations[J]. Journal of Physics A General Physics, 1999, 30(20):7259-7267.
- [19] Lou S Y. Searching for higher dimensional integrable models from lower ones via Painlevé analysis[J]. Physical Review Letters, 1998, 80(23):5027-5031.
- [20] Lou S Y, Xu J J. Higher dimensional integrable models from the Kadomtsev-Petviashvili equation[J]. Journal of Mathematical Physics, 1998, 39(10):5364-5376.
- [21] Chen L L, Lou S Y. Higher dimensional integrable models with Painlevé property obtained from (1+1)-dimensional Schwarz KdV equation[J]. Zeitschrift Für Naturforschung A, 1998, 53(8):689-692.
- [22] Lou S Y. KdV extensions with Painlevé property[J]. Journal of Mathematical Physics, 1998, 39(4):2112-2121.
- [23] Lou S Y. Conformal invariant Painlevé analysis and high dimensional integrable models[J]. Science in China Series A: Mathematics, 1999, 42(5):537-545.
- [24] Ruan H Y, Lou S Y, Chen Y X. Conformal invariant expansion and high dimensional integrable models[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1999, 32(14):2719-2729.
- [25] Yang J S, Lou S Y. Solitary wave solutions of high order scalar fields and coupled scalar fields[J]. Zeitschrift Für Naturforschung A, 1999, 54(3/4):195-203.
- [26] Lou S Y, Xu J J. (3+1)-dimensional Painlevé integrable models from (1+1)-dimensional KdV equation[J]. Acta Physica Sinica, 1999, 8:S280-S284.
- [27] Lou S Y, Yu J, Tang X Y. Higher dimensional integrable models from lower ones via Miura type deformation relation[J]. Zeitschrift Für Naturforschung A, 2000, 55:867-876.
- [28] Lou S Y. Deforming the lower-dimensional solitons to higher dimensional ones[J]. Communications in Theoretical Physics, 2000, 34(4):649-654.
- [29] 楼森岳. 利用 Miura 型不可逆变换得到高维可积模型 [J]. 物理学报, 2000, 49(9):1657-1662.
- [30] Yu J, Lou S Y. Deformation and (3+1)-dimensional integrable models[J]. Science in China Series A: Mathematics, 2000, 43(6):655-660.
- [31] Lou S Y, Tang X Y. Equations of arbitrary order invariant under the Kadomtsev-Petviashvili symmetry group[J]. Journal of Mathematical Physics, 2004, 45(3):1020-1030.
- [32] Lou S Y, Yu J, Lin J. (2+1)-dimensional models with Virasoro-type symmetry algebras[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1995, 28(6):L191-L196.
- [33] Lou S Y, Lin J, Yu J. (3+1)-dimensional models with an infinitely dimensional Virasoro type symmetry algebra[J]. Physics Letters A, 1995, 201(1):47-52.
- [34] Lou S Y, Yu J, Lin J, et al. Macro-experimental observation of the staggered mode in lattice system[J]. Chinese Physics Letters, 1995, 12:400-403.

- [35] 楼森岳, 俞军, 林机. 具有无穷维 Virasoro 型对称代数的(3+1)维可积模型[J]. 物理学报, 1996, 45(7):1073-1080.
- [36] Lin J, Lou S Y, Wang K L. High-dimensional integrable models with infinitely dimensional Virasoro-type symmetry algebra[J]. Communications in Theoretical Physics, 2001, 35(1):7-10.
- [37] Lin J, Lou S Y, Wang K L. High-dimensional Virasoro integrable models and exact solutions[J]. Physics Letters A, 2001, 287(3/4):257-267.
- [38] Weiss J, Tabor M, Carnevale G. The Painlevé property for partial differential equations[J]. Journal of Mathematical Physics, 1983, 24(3):522-526.
- [39] Conte R. Invariant Painlevé analysis of partial differential equations[J]. Physics Letters A, 1989, 140(7/8):383-390.
- [40] Kudryashov N A. Method for deriving rational solutions of some nonlinear evolution equations[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1997, 30(15):5445-5453.
- [41] Lou S Y. Conformal invariance and integrable models[J]. Journal of Physics A General Physics, 1999, 30(13):4803-4813.
- [42] Lou S Y. Search for high dimensional integrable models [J]. Science in China Series A: Mathematics, 1997, 40(12):1317-1324.

In search of higher dimensional integrable models from lower ones via Painlevé analysis

WANG Xiaobo, JIA Man, LOU Senyue*

(School of Physical Science and Technology, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: Extending the Painlevé approach to a more general form, one can obtain infinitely many new integrable models in the context that they possess conformal invariance and the Painlevé property in any space dimensions from a given lower dimensional integrable model. This paper mainly focuses on taking the Korteweg-de Vries, nonlinear Schrödinger and Kadomtsev-Petviashvili equations as simple examples, some explicit (3+1)-dimensional integrable models are given using the methods proposed by Weiss, Tabor, and Carnevale, as well as through truncation expansion and the leading order analysis.

Key words: Painlevé analysis; higher dimensional integrable models; lower dimensional integrable models

(责任编辑 韩 超)