

超声共振法测定圆柱体材料弹性常数的影响因素分析

丁军磊^{1,2}, 吴景慧¹, 吴丹¹, 马廷锋¹, 王骥^{1*}

(1. 宁波大学 机械工程与力学学院, 浙江 宁波 315211; 2. 宁波中策动力机电集团有限公司, 浙江 宁波 315033)

摘要: 为明确超声共振频谱分析法(RUS)测定圆柱体试样弹性常数的影响因素, 由此针对各向同性圆柱体开展实验, 观察圆柱体试样测量结果的分散性和稳定性, 且主要研究横纵比和有效模态数量对测量结果的影响, 并与拉伸试验的结果进行比较. 以测量结果标准差、变异系数和 95% 置信度下均值的区间估计 3 个指标来衡量结果的稳定性和分散性, 且从模态简并角度对实验结果进行分析. 最终结果表明, 当超声共振频谱分析法的有效模态数量在 17 左右、试样横纵比接近 1 时, 测量结果的稳定性和分散性较小.

关键词: 超声共振频谱分析法; 圆柱体; 弹性常数; 超声共振法; 稳定性; 分散性

中图分类号: TN912

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2020) 06-0053-06

弹性常数是反映材料本构关系的重要参数之一, 且准确测定材料弹性常数对于解决工程问题具有十分重要的意义. 随着测量技术的不断发展, 目前已有的常见材料弹性常数测定方法有拉伸实验、脉冲激励法(Impulse Excitation, IE)、纳米压痕技术(Nanoindentation Technology, NT)、四点弯曲法(Four Point Bending, 4PB)和超声共振频谱分析法(Resonant Ultrasound Spectroscopy, RUS)等^[1]. 拉伸实验是测定材料力学性能的基本实验, 通过应力与应变曲线可计算弹性常数; 脉冲激励法从试样受机械激励而产生的共振频率中计算弹性常数; 纳米压痕技术从被测试样卸载曲线的斜率中求出弹性常数; 四点弯曲法从弯曲应力与应变曲线中得出弹性常数; 超声共振频谱分析法则通过测定试样共振频谱, 将实测频率与计算频率进行对比, 当两者达到完全一致状态时便可得出弹性常数.

超声共振频谱分析法早期的发展是由地球物理学发展所推动的^[2]. 这种方法一开始被用来测量各向同性球体试样的弹性常数, 随着算法和电子计算机的发展, 逐步扩展到其他形状的各向异性晶体试样, 如平行六面体和圆柱体等^[1-2]. 随着新型材料的出现, 各种测量技术对材料性能的测量

往往是破坏性和不精确的, 而且对于小型试样更是无能为力, 如拉伸实验等. 而超声共振频谱法可以精确和高效率地完成小至几百微米试样的测量, 现已被应用于高、低温极端环境下^[3]的各类材料弹性常数的测试^[4].

影响超声共振频谱分析法测量结果的因素主要有试样本身的形状、尺寸(横纵比)以及假定的初始弹性常数值和有效模态数量等. 国内已有学者针对上述几个因素做了相关的实验研究^[5], 并得出“宜选用边长为 1.5 cm 的平行六面体”等结论. 但考虑到上述实验并未讨论圆柱体试样的尺寸变化对结果的影响, 此外也未见有相关文献报道. 我们针对圆柱体试样开展实验, 主要讨论圆柱体横纵比和有效模态数量对结果的影响, 从而为高精度和高效率地测量圆柱体试样提供最佳测试方案. 很明显, 这样的研究需要利用不同方法精确测定材料的弹性常数, 实现不同方法的互相验证和数值结果的确认. 而在我们的研究中, 参考数值由标准试样的拉伸实验确定.

1 超声共振频谱分析法的测试原理

决定物质自由振动固有频率的因素有形状、密

收稿日期: 2018-12-02.

宁波大学学报(理工版) 网址: <http://journalg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(11672142); 浙江省大学生科技创新活动计划暨新苗人才计划(2015R405022).

第一作者: 丁军磊(1995-), 男, 浙江宁波人, 硕士, 主要研究方向: 压电声波谐振器. E-mail: dingjunlei@qq.com

*通信作者: 王骥(1962-), 男, 甘肃徽县人, 教授, 主要研究方向: 压电声波谐振器. E-mail: wangji@nbu.edu.cn

度、弹性常数、边界条件和能量耗散(在此处的分析中可以不考虑能量耗散的影响^[6])等。因此,可以通过测定已知形状试样的固有频率(实测频率)和密度来计算弹性常数,然而建立两者之间精确的解析关系非常困难。一般近似的方法是通过拉格朗日函数得到弹性波方程,再运用 Rayleigh-Ritz 法得出试样振动的本征方程。这些方程能反映固有频率与弹性常数之间的关系,然而由实测频率反推弹性常数是不可行的^[7]。于是可由假设弹性常数得到计算频率(正问题),再通过计算频率与实测频率的匹配调整假设弹性常数,不断迭代更新假定弹性常数,直至频率达到最佳匹配状态,从而最终得出弹性常数(反问题)。

1.1 正问题: 计算共振频率^[7]

弹性体运动的动力学方程可以通过拉格朗日函数建立:

$$L = \frac{1}{2} \int_V (\rho \omega^2 u_i^2 - C_{ijkl} u_{i,j} u_{k,j}) dV, \quad (1)$$

式中: ω 为角频率; u_i 为位移分量,可表示为具有时间依赖性的函数 $u_i(t) = u_0 \exp(i\omega t)$; C_{ijkl} 为弹性常数张量; V 为弹性体体积。

将(1)式针对位移 u_i 变分,可以得到弹性波方程和无应力边界条件。

由 Rayleigh-Ritz 法假设位移函数为 $u_i = a_{\lambda i} \phi_{\lambda}$, 其中, ϕ_{λ} 为基函数。

将位移函数代入(1)式,可以得到本征方程: $\omega^2 E a = \Gamma a$, 其中, E 为动能项, Γ 为势能项,弹性常数隐含其中。该方程的特征值为固有频率,而特征向量为振幅。具体的计算公式和过程可查阅文献^[7]。

1.2 反问题: 反演弹性常数^[7]

由上述本征方程可求解试样的固有频率,将假定弹性常数代入,可求得计算频率 f_i , 并将其与测量频率 g_i 比对,这是一个最小二乘优化问题:

$$\min F = \sum_i w_i (f_i - g_i)^2, \quad (2)$$

式中: w_i 为权重,表示该实测频率的可信程度,一般取 1 或 0。本文使用 Levenberg-Marquardt 算法求解此非线性优化问题,通过不断更新弹性常数值以使得实测频率与计算频率之间达到最优的匹配状态。常用的判断标准是频率匹配系数小于 0.2%,如果达到最大迭代次数后不满足该要求,则需要

重新匹配实测频率与计算频率,直至频率匹配系数小于 0.2%。

2 实验设计及结果分析

2.1 实验设计

实验设计 5 种类型的圆柱体试样,直径分别为 30 mm,高度分别为 5、10、15、20、25 mm。每类试样数量均有 5 个,且取自同根钢棒相邻位置。试样材料为 45 号钢,制备方法按照国标 GB/T 2975-1998。试样具体几何参数见表 1,其中,直径用游标卡尺测量,精确到 0.02 mm;高度用千分尺测量,精确到 0.001 mm;质量用电子天平测量,精确到 0.000 1 g。主要测量仪器由美国 Magnaflux Quasar Systems 公司生产的超声共振谱仪,型号 RUSpec 4000(图 1)。仪器测量原理如前所述。整个实验过程均在室温条件下进行,平均温度 $T_A = 25.26^\circ\text{C}$,平均湿度 $E_{RH} = 65.83\%$ 。各次实验所用的假定弹性常数初始值均为 $C_{11} = 272 \text{ GPa}$, $C_{44} = 80 \text{ GPa}$ 。

表 1 圆柱体试样的质量与几何参数

项目	编号				
	I	II	III	IV	V
高度/mm	5.010	10.039	15.141	20.090	25.070
直径/mm	30.05	30.05	30.05	30.08	30.08
质量/g	27.669 1	55.575 9	83.882 0	111.306 6	138.882 2
横纵比	6	3	2	1.5	1.2
数量/个	5	5	5	5	5

注:考虑篇幅限制,表中数据为平均值,实验过程中均采用试样个体测量值。



图 1 超声共振谱仪

2.2 实验结果

本实验研究了不同高度的圆柱体试样对有效模态和计算模态数量的要求,以及对测量结果准确性和分散性的影响,再从中选择分散性较低而准确性较高的试样用于研究有效模态数量对结果的影响,经整理后的实验数据见表 2 至表 4。表中

$\bar{X}$ 、 S 和 CV 分别表示样本均值、标准差和变异系数, T 为在 95%置信度下的总体均值的区间估计, 反映样本均值的波动幅度, 由 $T = t_{0.025}(n-1)S / \sqrt{n}$ 计算, $t_{0.025}(n-1)$ 表示 t 分布上的 0.025 分位点^[1].

表 2 各类试样完成匹配所需模态数量

编号	n	$m_1/\text{个}$		$m_2/\text{个}$		$m_p/\text{个}$	
		$\bar{X}$	S	$\bar{X}$	S	$\bar{X}$	S
I	3	13	2	130	20	11	2
II	3	12	3	105	14	10	3
III	3	17	4	79	10	6	2
IV	3	18	2	100	2	7	1
V	3	22	3	65	7	4	1

注: m_p 表示匹配单位有效模态所需的计算模态数量, 由 m_2/m_1 计算.

图 2 为各类试样恰好完成匹配时的有效模态和计算模态数量分布的箱线图, 将疑似异常值剔除后, 数据整理于表 2. 表中 m_1 、 m_2 、 m_p 和 n 分别表示有效模态、计算模态、匹配单位有效模态所需

的计算模态的数量和实验次数, 所有数据均向上取整.

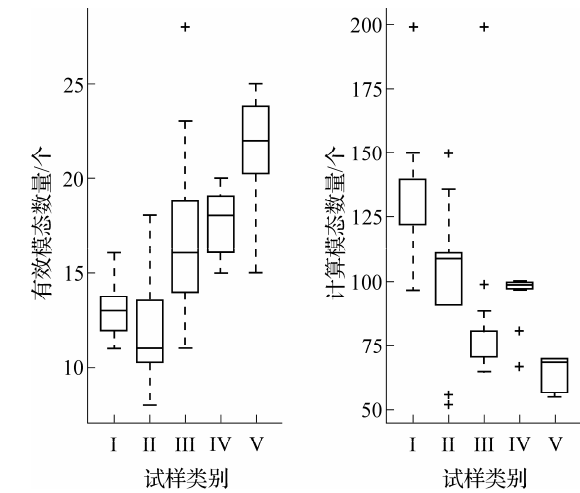


图 2 匹配所需模态数量的箱线图

图 3 为各试样恰好完成匹配时的弹性常数值分布箱线图, 将疑似异常值剔除后, 整理后数据

表 3 剪切模量和弹性模量的测量结果

编号	r	n	G				E			
			$\bar{X}/\text{GPa}$	S/GPa	$CV/\%$	T/GPa	$\bar{X}/\text{GPa}$	S/GPa	$CV/\%$	T/GPa
I	6	15	80.87	0.50	0.62	0.35	209.69	0.47	0.23	0.12
II	3	15	81.75	0.16	0.20	0.12	210.57	0.28	0.13	0.08
III	2	15	81.86	0.08	0.09	0.05	210.61	0.18	0.09	0.05
IV	1.5	15	81.88	0.08	0.10	0.06	210.68	0.29	0.14	0.08
V	1.2	15	81.71	0.09	0.11	0.06	210.52	0.12	0.06	0.03

注: r 表示横纵比, 由 d/h 计算; n 表示实验次数.

表 4 不同有效模态数量下试样 V 的测量结果

$m/\text{个}$	n	G				E			
		$\bar{X}/\text{GPa}$	S/GPa	$CV/\%$	T/GPa	$\bar{X}/\text{GPa}$	S/GPa	$CV/\%$	T/GPa
4	15	81.68	0.049 8	0.000 6	0.027 6	210.479 4	0.054 3	0.000 3	0.030 1
5	13	81.69	0.031 9	0.000 4	0.019 3	210.478 9	0.065 5	0.000 3	0.039 6
6	15	81.68	0.056 1	0.000 7	0.031 0	210.478 3	0.082 0	0.000 4	0.045 4
7	15	81.68	0.063 1	0.000 8	0.035 0	210.477 1	0.106 6	0.000 5	0.059 0
8	15	81.68	0.071 3	0.000 9	0.039 5	210.483 4	0.118 2	0.000 6	0.065 4
9	15	81.69	0.072 2	0.000 9	0.040 0	210.488 5	0.129 6	0.000 6	0.071 7
10	9	81.67	0.045 2	0.000 6	0.034 8	210.471 4	0.045 9	0.000 2	0.035 3
11	14	81.68	0.047 4	0.000 6	0.027 4	210.482 3	0.067 4	0.000 3	0.038 9
12	14	81.68	0.067 7	0.000 8	0.039 1	210.479 6	0.106 7	0.000 5	0.061 6
13	13	81.67	0.078 2	0.001 0	0.047 2	210.485 6	0.129 1	0.000 6	0.078 0
14	14	81.66	0.065 0	0.000 8	0.037 6	210.456 4	0.127 1	0.000 6	0.073 4
15	15	81.64	0.058 9	0.000 7	0.032 6	210.439 3	0.107 8	0.000 5	0.059 7

续表

$m/\text{个}$	n	G				E			
		$\bar{X}/\text{GPa}$	S/GPa	$CV/\%$	T/GPa	$\bar{X}/\text{GPa}$	S/GPa	$CV/\%$	T/GPa
16	9	81.64	0.060 3	0.000 7	0.046 3	210.448 8	0.101 9	0.000 5	0.078 4
17	14	81.64	0.061 0	0.000 7	0.035 2	210.457 4	0.089 9	0.000 4	0.051 9
18	14	81.64	0.070 5	0.000 9	0.040 7	210.454 0	0.105 8	0.000 5	0.061 1
19	9	81.63	0.100 7	0.001 2	0.077 4	210.442 2	0.143 3	0.000 7	0.110 2
20	13	81.65	0.096 0	0.001 2	0.058 0	210.495 6	0.128 7	0.000 6	0.077 8

注: m 表示有效模态数量, n 表示测量次数.

见表 3.

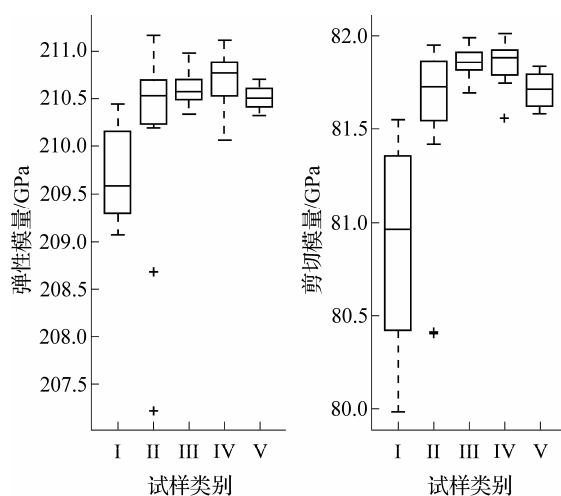


图3 各类试样弹性常数分布箱线图

从表 3 的结果可以发现, 试样 V 的数据标准差和变异系数较小, 总体均值的 95%置信区间也较小. 所以选择试样 V 研究有效模态数量从 4 逐步增加至 20 个的过程, 测定其结果的稳定性及分散性, 不同有效模态数量下的测量结果见表 4.

2.3 讨论

从表 3 可见, 对于各向同性圆柱体而言, 纵横比在 1~6 附近的试样, 其完成匹配只需要 10~20 个有效模态即可. 从中还能发现各类试样的有效模态和计算模态数量相差悬殊, 主要原因是试样在几何、材料上的对称性使大多数共振峰都重叠在一起形成简并模态^[1], 使得计算模态数量偏多.

此外, 随着试样纵横比的减小(逐渐接近 1), 完成匹配所需的有效模态数量逐渐增加, 而且单位有效模态所需的计算模态数量减小, 从而表明模态利用率和匹配效率都提高了. 图 4 为从各个试样中选取的一部分频谱图(图中相邻的或小振幅的共振峰未能显见), 统计发现试样 V 的共振峰数量

最多(8 个), 而试样 I 最少(3 个). 原因可能是(1)随着试样纵横比的增加, 以扭转、横振为主要形式的振动运动增强, 使得传感器无法检测; (2)试样高度相对减少, 使得模态节点消失或者恰好与传感器接触^[7]. 这也产生了有很多理论计算模态却没有实测模态与之对应的情况, 在这种情况下, 发生模态错误匹配的几率较大, 结果的准确性值得怀疑. 若假定初始弹性常数值与真值偏离较大, 这种由错误匹配所产生的误差会更大.

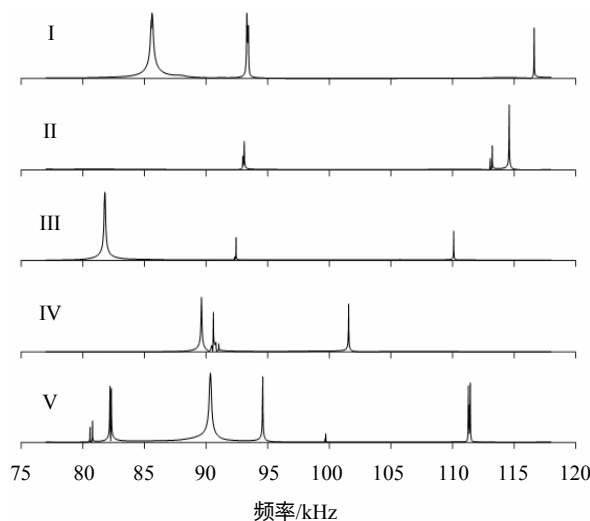


图4 试样 I~V 的共振频谱图(77~120 kHz)

表 3 为各类试样的弹性常数测定值, 将测量值和标准差绘制成如图 5 所示的误差图. 从图中可见, 试样 V (纵横比 1.2) 的弹性模量测定值的标准差、变异系数比其他试样小, 而且 95%置信度下的总体均值波动也较小, 数据的稳定性较高. 试样 III、IV 和 V 的剪切模量测定值的标准差和变异系数相差不大, 且均较小, 数据稳定性较高. 出现这种情况的原因有(1)试样 I、II 纵横比远离 1, 其几何形状限制了自由振动的振型, 有较为严重的模态简

并、消失的情况,而模态匹配依赖于实验者的主观判断,发生随机误差的可能性大;(2)随着试样尺寸变大,结构内部出现瑕疵(如裂缝)的可能性增加,这种轻微的差异会产生新的模态^[8]。这也可以解释试样Ⅲ的剪切模量测定值较试样Ⅴ稍稳定,不过这种新的模态可以被人为地识别出来。

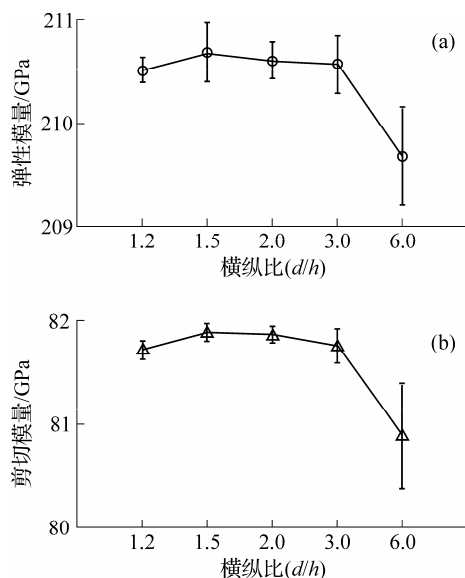


图5 弹性模量(a)和剪切模量(b)测量值的误差图

表5给出了由拉伸实验测得的弹性常数参考值。从表3和表5的比较可知,超声共振谱分析法与拉伸实验的测量结果互相验证。由此可见,无论是横纵比高达6的试样还是接近1的试样,超声共振谱分析法测量结果都具有较高的准确性,只是数据的分散性有差异。表6列出了试样Ⅴ各次的测量结果,以供查询。

表5 圆形截面比例试样的拉伸试验弹性常数测定结果

d/mm	L/mm	E/GPa		G/GPa	
5	25	205.00	202.07	-	-
8	40	213.82	210.72	-	-
15	75	209.31	211.25	81.09	81.77

表6 试样Ⅴ恰好完成匹配时的各次测量结果

E/GPa			G/GPa		
210.51	210.53	210.60	81.80	81.72	81.84
210.43	210.51	210.52	81.78	81.67	81.74
210.52	210.33	210.71	81.61	81.73	81.70
210.61	210.42	210.40	81.83	81.60	81.67
210.32	210.64	210.68	81.80	81.59	81.58

表4则主要反映有效模态数量对测量结果的影响。从表中可见,当有效模态数量为4、10和17左右时,测量结果的分散性较小。当模态数量较少时,发生匹配失误的可能性小;当模态数量较多时,这种随机误差可以通过平均的方法消除。

此外,关于试样质量对夹持约束力的影响,有学者指出加持力轻微大于重力是允许的^[2],且这种影响产生的误差很小(最多0.2%)^[9],所以本实验不予考虑。

3 结论

本文研究了各向同性圆柱体弹性常数测定的超声共振频谱分析法受试样横纵比、有效模态数量的影响,并分析了造成这种影响的原因。综合上述实验结果与讨论分析,我们认为:(1)对于各向同性圆柱体试样,超声共振谱分析时选用10~20个有效模态即可完成匹配;(2)使用超声共振频谱分析法测定材料弹性常数时,宜选用横纵比接近1的试样;(3)对于横纵比接近1的试样,有效模态宜取17个左右。

此外,在与参考值比较后我们还发现,无论是横纵比高达6的试样还是接近1的试样,超声共振谱分析法测量结果都具有较高的准确性,其测试结果的可信度高。由此表明该方法可以替代其他实验(如拉伸实验)作为高效率测量材料弹性常数的方法,实验前的准备工作比拉伸试验简单,同一试样可以多次重复无损测量,测量数据的稳定性高(对比表5和表6)。

从本实验的结果看,测试结果不仅与材料尺寸有关,还与尺寸比例有关。文献[5]指出:“宜选用边长为1.5 cm的平行六面体”。我们对其给出的一个试样尺寸(1.508 1 cm×1.503 8 cm×2.000 9 cm)计算横纵比(高度与对角线之比)后发现其横纵比为0.939 5,非常接近1,这也恰好印证了此观点。

在此实验之后还可考虑更深入的研究,如试样安装方式对低阶模态探测的影响,测试结果对圆柱体高度变化或直径变化的敏感性等等。

参考文献:

- [1] Radovic M, Lara-Curzio E, Riester L. Comparison of different experimental techniques for determination of

- elastic properties of solids[J]. *Materials Science & Engineering A*, 2004, 368(1/2):56-70.
- [2] 王振. 基于超声共振频谱法的各向异性晶体材料的弹性常数测定[D]. 宁波: 宁波大学, 2013.
- [3] Maynard J D. Resonant ultrasound spectroscopy[C]// *Medical Imaging '98. Proc SPIE 3341, Medical Imaging 1998: Ultrasonic Transducer Engineering*, San Diego, CA, USA, 1998:132-142.
- [4] Ren F, Case E D, Sootsman J R, et al. The high-temperature elastic moduli of polycrystalline PbTe measured by resonant ultrasound spectroscopy[J]. *Acta Materialia*, 2008, 56(20):5954-5963.
- [5] 蒋佳霖, 马廷锋, 王振, 等. 超声共振弹性常数测定技术的影响因素分析[C]//2013 中国西部声学学术交流会论文集(上). 敦煌, 2013:149-152.
- [6] Migliori A, Sarrao J L, Visscher W M, et al. Resonant ultrasound spectroscopic techniques for measurement of the elastic moduli of solids[J]. *Physica B: Condensed Matter*, 1993, 183(1/2):1-24.
- [7] Migliori A, Sarrao J L, Visscher W M, et al. Implementation of a modern resonant ultrasound spectroscopy system for the measurement of the elastic moduli of small solid specimens[J]. *Review of Scientific Instruments*, 2005, 76(12):121301.
- [8] Zadler B J, Scales J A, Smith M L. Resonant ultrasound spectroscopy: Theory and application[J]. *Geophysical Journal International*, 2004, 156(1):154-169.
- [9] Ohno I. Free vibration of a rectangular parallelepiped crystal and its application to determination of elastic constants of orthorhombic crystals[J]. *Journal of Physics of the Earth*, 1976, 24(4):355-379.

The influence factors for measurements of elastic constants of isotropic steel cylinders by resonant ultrasound spectroscopy

DING Junlei^{1,2}, WU Jinghui¹, WU Dan¹, MA Tingfeng¹, WANG Ji^{1*}

(1.Faculty of Mechanical Engineering & Mechanics, Ningbo University, Ningbo 315211, China;

2.Ningbo C.S.I. Power & Machinery Group Co., Ltd., Ningbo 315033, China)

Abstract: Resonant ultrasound spectroscopy (RUS) is an efficient and accurate method to determine elastic constants of solids, but the results are affected by sample sizes and shapes. In order to study the distribution and stability of measurement data with cylindrical samples, experiments with isotropic cylinders of different aspect ratios and numbers of effective modes are conducted. The stability and distribution of measured results are examined with the standard deviation, the coefficient of variation and the boundaries of 95% confidence interval for the mean value. The results are further analyzed with the consideration of the degeneration of vibration modes and compared with those from tensile tests. The results show that the stability and distribution of measurements are small when the number of effective vibration modes is about 17 and the aspect ratio of samples is close to 1.

Key words: resonant ultrasound spectroscopy; cylinder; elastic constants; ultrasonic resonance method; stability; distribution

(责任编辑 章践立)