

不可度量化的射影平坦 Spray 的构造

姜艳文, 李本伶*

(宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 刻画射影平坦 Finsler 度量是著名的 Hilbert 第四问题正则性情形, 且任意一个 Finsler 度量可以通过它的测地线方程诱导一个 Spray, 因此研究射影平坦 Spray 的可度量化问题令人关注. 本文研究一类射影平坦 Spray 的可度量化问题, 通过欧氏度量 $|y|$ 和内积 $\langle x, y \rangle$ 的线性组合, 构造两类射影平坦 Spray; 其次利用反证法和具有迷向曲率 Spray 的定义, 证明以上两类 Spray 均不由任意 Finsler 度量诱导, 且不具有迷向曲率.

关键词: Finsler 度量; 射影平坦; Spray; 测地系数

中图分类号: O186

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2020) 06-0103-04

Finsler 几何包括其特殊情形——黎曼几何是现代数学中的重要前沿学科, 几何学大师陈省身称其是没有二次型限制的黎曼几何. 由于任意一个 Finsler 度量均可通过其测地线方程诱导一个 Spray, 反之不一定成立. 故给定一个 Spray, 讨论其是否能度量化(即能否由 Finsler 度量诱导)成为近年来逐渐受到关注和研究的几何问题. 射影平坦 Spray 是 Spray 几何的重要组成部分. 由于射影平坦 Finsler 度量自然诱导射影平坦 Spray, 而刻画射影平坦 Finsler 度量是著名的 Hilbert 第四问题正则性情形, 所以射影平坦 Spray 的可度量化问题值得研究. 为此, 本文针对如何构造不可度量化的射影平坦 Spray 开展研究.

事实上, 1999 年 Grifone 和 Muzsnay 发现具有迷向曲率的 Spray 可由 Finsler 度量诱导的一些条件^[1]. Shen 和 Chen 等^[2-3]进一步给出实例, 说明并非任意一个 Spray 均可被度量化. 2006 年, Muzsnay^[4]根据与 Spray 有关的由水平矢量场及其连续的李括号生成的完整代数, 为此类 Finsler 度量的局部可量化性制定一个条件. 之后, Yang^[5]利用一类具有常数旗曲率的射影平坦 Finsler 度量, 构造一类新的具有标量曲率 Spray, 包括可被度量化的及不可被度量化的. Li 等^[6]通过引入迷向曲率的定义, 对射影

平坦 Spray 的可度量化进行研究, 得到不能度量化的射影平坦 Spray 的构造方法. 最近, Li 等^[7]给出几类具有迷向曲率的不可度量化 Spray 的构造. 如前文所述, 已有一些射影平坦 Spray 被构造, 且都具有迷向曲率. 因此, 问题是如何构造新的不可度量化的射影平坦 Spray, 并且也不具有迷向曲率? 本文构造符合此问题的 Spray 可统一表达为如下形式:

$$G^i = \left(k_1 \frac{|y|}{\sqrt{1-|x|^2}} + k_2 \frac{\langle x, y \rangle}{1-|x|^2} \right) y^i,$$

其中, $k_1 \neq 0$, k_2 为任意常数. 文中对 k_1 和 k_2 的取值进行分类讨论, 并在例 1 和例 2 中给出具体的显式表达.

1 预备知识

Spray 的概念由 Douglas 引入, 它由路径空间中的路径(测地线)组成^[8].

定义 1 Spray 是流形 M 的切丛 TM 上的一个光滑向量场 G , 在局部坐标系 (x^i, y^i) 下满足:

$$G = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad (1)$$

其中, Spray 系数(测地系数) $G^i = G^i(x, y)$ 是 $TM \setminus \{0\}$ 上关于 y 的二次齐次光滑函数.

收稿日期: 2020-05-12.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journaljg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(11371209); 浙江省自然科学基金(R18A010002).

第一作者: 姜艳文(1992-), 女, 河南新乡人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 微分几何. E-mail: louyanwennbu@163.com

*通信作者: 李本伶(1979-), 女, 浙江宁波人, 教授, 主要研究方向: 微分几何、Finsler 几何. E-mail: libenling@nbu.edu.cn

假设在开集 $U \subset R^n$ 上, 若一个 Spray G 的测地线都是直线, 则称该 Spray 是射影平坦的. 此时, G 的 Spray 系数(测地系数) G^i 满足 $G^i = Py^i$, 其中, $P = P(x, y)$ 称为射影因子, 是关于 y 的一次齐次函数.

定义 2 设 G 是流形 M 上的 Spray, 则 G 是具有标量曲率的 Spray 当且仅当它的黎曼曲率分量:

$$R_k^i := 2 \frac{\partial G^i}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial y^k} y^j + 2G^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j} \frac{\partial G^j}{\partial y^k},$$

满足以下等式:

$$R_k^i = R \delta_k^i - \tau_k y^i, \quad (2)$$

其中, $R = R(x, y)$, $\tau_k = \tau_k(x, y)$, 且满足 $R = \tau_k y^k$. 若标量曲率方程式(2)中 τ_k 满足 $\tau_k = R_k/2$, 则称 G 具有迷向曲率. 其中, “.” 表示关于 y^k 的垂直共变导数.

已知射影平坦 Spray ($G^i = Py^i$) 是具有标量曲率的. 此时, R 和 τ_k 满足以下微分方程:

$$R = P^2 - P_0, \tau_k = PP_{y^k} + P_{k0} - 2P_{x^k}, \quad (3)$$

其中, $P_0 = P_{x^m y^m}$, $P_{k0} = P_{y^k x^m} y^m$, P_{y^k} 表示对 y^k 求偏导, 下标“0”表示关于 x^i 求偏导且与 y^i 缩并. 该情形下, 对 R 关于 y^k 求偏导可得:

$$R_{y^k} = R_k = 2PP_{y^k} - P_{k0} - P_{x^k}.$$

定义 3 设 TM 是 n 维微分流形 M 的切丛. 若 TM 上的函数 $F = F(x, y) : TM \setminus \{0\} \rightarrow [0, \infty)$ 满足以下条件: (i) $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$, $\forall \lambda \in R^+$; (ii) $F(x, y)$ 在 $TM \setminus \{0\}$ 上是 C^∞ 函数; (iii) 对任意非零向量 $y \neq 0$, 矩阵

$$g_{ij}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}(x, y) = \frac{1}{2} [F^2]_{y^i y^j},$$

是正定的, 则称 F 为 M 上的一个 Finsler 度量.

F 的测地线 $x(t)$ 满足以下方程:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + 2G^i \left(x(t) \frac{dx}{dt} \right) = 0,$$

其中,

$$G^i = \frac{1}{4} g^{il} \left\{ [F^2]_{x^k y^l} y^k - [F^2]_{x^l} \right\}, g^{ij} = (g_{ij})^{-1}.$$

因此, Finsler 度量由其测地系数 $G^i = G^i(x, y)$ 自然地诱导了 Spray. 如果 Finsler 度量 F 诱导具有标量曲率的 Spray, 则称 F 具有标量旗曲率. 此时,

F 的黎曼曲率 R_k^i 可表达为:

$$R_k^i = K(F^2 \delta_k^i - FF_{x^k} y^i). \quad (4)$$

如果 F 诱导的 Spray 是射影平坦的, 那么 F 就称为射影平坦 Finsler 度量. 早在 1903 年, Hamel 已经证明 Finsler 度量 F 是射影平坦的充要条件是 $F_{x^j y^k} - F_{x^k y^j} = 0$ [9]. 此时, $P = P(x, y)$ 满足以下等式:

$$P = F_0 / (2F). \quad (5)$$

在构造后续的例子中, 要用到以下引理.

引理 1 [10-11] 一个局部射影平坦的 Finsler 度量 F 一定具有标量旗曲率 $K = K(x, y)$, 此时 K 满足:

$$K = \frac{P^2 - P_0}{F^2} = \frac{R}{F^2}. \quad (6)$$

2 构造不由 Finsler 度量诱导的 Spray 例子

本节给出两类不由任意 Finsler 度量诱导的 Spray 的具体构造(例 1、例 2), 并且它们都不具有迷向曲率, 因此均是新的不可度量的 Spray. 例 1 和例 2 的不同在于例 1 考虑含有欧氏度量 $|y|$ 的情形, 例 2 则不仅包含欧氏度量 $|y|$, 而且具有欧氏内积 $\langle x, y \rangle$ 项, 比例 1 更一般. 这也为以后研究 Spray 的可度量化问题提供更多思路和想法.

设 $G = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2P(x, y) y^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ 为开区域 $U \subset R^n$

上的射影平坦 Spray. 考虑 G 的射影因子 P 表达式如下:

$$P = k_1 \frac{|y|}{\sqrt{1-|x|^2}} + k_2 \frac{\langle x, y \rangle}{1-|x|^2}, \quad (7)$$

其中, $k_1 \neq 0$, k_2 为任意常数. 则该 Spray 系数(测地系数) $G^i = Py^i$ 可具体表达为:

$$G^i = \left(k_1 \frac{|y|}{\sqrt{1-|x|^2}} + k_2 \frac{\langle x, y \rangle}{1-|x|^2} \right) y^i. \quad (8)$$

直接对等式(7)关于指标 x^k 和 y^k 分别求偏导可得:

$$P_{x^k} = \frac{k_1 |y| x_k}{(1-|x|^2)^{3/2}} + \frac{k_2 y_k}{1-|x|^2} + \frac{2k_2 \langle x, y \rangle x_k}{(1-|x|^2)^2},$$

$$P_{y^k} = \frac{k_1 y_k}{|y| \sqrt{1-|x|^2}} + \frac{k_2 x_k}{1-|x|^2},$$

$$P_{k0} = \frac{k_1 \langle x, y \rangle y_k}{(1-|x|^2)^{3/2} |y|} + \frac{k_2 y_k}{1-|x|^2} + \frac{2k_2 \langle x, y \rangle x_k}{(1-|x|^2)^2}.$$

由于射影平坦 Spray 具有标量曲率, 因此将上述结果代入等式(3), 则 G 的黎曼曲率中的 R 和 τ_k

可表达如下:

$$R = -\frac{(k_1^2 - k_2)|y|^2}{|x|^2 - 1} + \frac{k_1(2k_2 - 1)\langle x, y \rangle |y|}{(1 - |x|^2)^{3/2}} + \frac{k_2(k_2 - 2)\langle x, y \rangle^2}{(|x|^2 - 1)^2},$$

$$\tau_k = \left\{ \frac{k_1(k_2 - 2)|y|}{(1 - |x|^2)^{3/2}} + \frac{k_2(k_2 - 2)\langle x, y \rangle}{(|x|^2 - 1)^2} \right\} x_k + \left\{ -\frac{(k_1^2 - k_2)}{|x|^2 - 1} + \frac{k_1(k_2 + 1)\langle x, y \rangle}{(1 - |x|^2)^{3/2}|y|} \right\} y_k.$$

例 1 当 $k_1 \neq 0, k_2 = 0$. 此时等式(7)表示为:

$$P = k_1 \frac{|y|}{\sqrt{1 - |x|^2}}.$$

直接求解可得:

$$R = \frac{k_1^2 |y|^2}{1 - |x|^2} - \frac{k_1 \langle x, y \rangle |y|}{(1 - |x|^2)^{3/2}},$$

$$\tau_k = -\frac{2k_1 |y|}{(1 - |x|^2)^{3/2}} x_k + \frac{k_1^2}{1 - |x|^2} y_k + \frac{k_1}{(1 - |x|^2)^{3/2}} \frac{\langle x, y \rangle}{|y|} y_k. \quad (9)$$

可以证明 $G^i = Py^i$ 确定的 Spray 不能被 Finsler 度量诱导. 利用反证法, 假设 G 可以被 Finsler 度量 F 诱导, 利用上述结果可得:

$$\tau_k - \frac{1}{2} R_k = -\frac{3}{2} \frac{k_1}{(1 - |x|^2)^{3/2}} |y| x_k + \frac{3}{2} \frac{k_1}{(1 - |x|^2)^{3/2}} \frac{\langle x, y \rangle}{|y|} y_k = -\frac{3}{2} \frac{k_1}{(1 - |x|^2)^{3/2}} \left(\frac{\langle x, y \rangle}{|y|} \right)_k |y|^2.$$

又因为等式(2)和等式(4)成立, 则有

$$\tau_k - \frac{1}{2} R_k = -\frac{1}{2} K_k F^2.$$

联立以上 2 式, 化简可得:

$$K_k = \frac{3k_1}{(1 - |x|^2)^{3/2}} \left(\frac{\langle x, y \rangle}{|y|} \right)_k \frac{|y|^2}{F^2}. \quad (10)$$

由等式(4)可得 $R = KF^2$, 利用等式(9)直接计算可得旗曲率 K 为:

$$K = \frac{R}{F^2} = \frac{k_1^2 |y|^2}{1 - |x|^2} - \frac{k_1 \langle x, y \rangle}{(1 - |x|^2)^{3/2}} \frac{|y|}{F^2} |y|^2.$$

对上式关于 y^k 求偏导可得:

$$K_k = \frac{k_1^2}{1 - |x|^2} \left(\frac{|y|^2}{F^2} \right)_k - \frac{k_1}{(1 - |x|^2)^{3/2}} \left(\frac{\langle x, y \rangle}{|y|} \right)_k \frac{|y|^2}{F^2} - \frac{k_1 \langle x, y \rangle}{(1 - |x|^2)^{3/2}} \left(\frac{|y|^2}{F^2} \right)_k. \quad (11)$$

联立等式(10)(11), 可得:

$$\frac{4k_1}{(1 - |x|^2)^{3/2}} \left(\frac{\langle x, y \rangle}{|y|} \right)_k \frac{|y|^2}{F^2} = \left(\frac{k_1^2}{1 - |x|^2} - \frac{k_1 \langle x, y \rangle}{(1 - |x|^2)^{3/2}} \frac{|y|}{F^2} \right)_k,$$

进一步化简可得:

$$\left(\ln \frac{|y|^2}{F^2} \right)_k = -4 \left[\ln \left| \frac{k_1^2}{1 - |x|^2} - \frac{k_1 \langle x, y \rangle}{(1 - |x|^2)^{3/2}} \frac{|y|}{F^2} \right| \right]_k.$$

即存在一个数量函数 $c = c(x)$ 使得

$$F^2 = e^{-c(x)} |y|^2 \left| \frac{k_1^2}{1 - |x|^2} - \frac{k_1 \langle x, y \rangle}{(1 - |x|^2)^{3/2}} \frac{|y|}{F^2} \right|^4,$$

故 F 求解为:

$$F = e^{\frac{c(x)}{2}} |y| \left| \frac{k_1^2}{1 - |x|^2} - \frac{k_1 \langle x, y \rangle}{(1 - |x|^2)^{3/2}} \frac{|y|}{F^2} \right|^2. \quad (12)$$

利用等式(5)和上式 F , 可求得 P 为:

$$P = \frac{\left(e^{\frac{c(x)}{2}} \right)_0 \left(\frac{k_1^2}{1 - |x|^2} - \frac{k_1 \langle x, y \rangle}{(1 - |x|^2)^{3/2}} \frac{|y|}{F^2} \right)_0}{e^{\frac{c(x)}{2}} \left(\frac{k_1^2}{1 - |x|^2} - \frac{k_1 \langle x, y \rangle}{(1 - |x|^2)^{3/2}} \frac{|y|}{F^2} \right)} = \frac{\left(e^{\frac{c(x)}{2}} \right)_0}{e^{\frac{c(x)}{2}}} \cdot \left(2k_1 \sqrt{1 - |x|^2} \langle x, y \rangle |y| - 3 \langle x, y \rangle^2 - (1 - |x|^2) |y|^2 \right) / \left((k_1 |y| \sqrt{1 - |x|^2} - \langle x, y \rangle) (1 - |x|^2) \right).$$

从上述结果可见, 等式(12)中 F 求解得到的 P 中含有 $\langle x, y \rangle$ 项, 与该情况下最初构造的 P 矛盾. 因此该情形下 G 不能被任意 Finsler 度量诱导, 并不具有迷向曲率.

例 2 当 $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$. 在此情况下, 取式(7)中的 $k_1 = 1, k_2 = 2$. 此时, P 形如

$$P = \frac{|y|}{\sqrt{1 - |x|^2}} + 2 \frac{\langle x, y \rangle}{1 - |x|^2}.$$

直接计算可得:

$$R = \frac{|y|^2}{|x|^2 - 1} + \frac{3 \langle x, y \rangle |y|}{(1 - |x|^2)^{3/2}},$$

$$\tau_k = \frac{y_k}{|x|^2 - 1} + \frac{3 \langle x, y \rangle}{(1 - |x|^2)^{3/2}} y_k,$$

$$\tau_k - \frac{1}{2} R_k = -\frac{3}{2} \frac{|y| x_k}{(1 - |x|^2)^{3/2}} +$$

$$\frac{3}{2} \frac{y_k}{(1-|x|^2)^{3/2}} \frac{\langle x, y \rangle}{|y|}.$$

由定义可知, 此 $\text{Spray}(G^i = Py^i)$ 不具有迷向曲率. 由上式易见 $R|y|_k = \tau_k |y|$ 成立, 可以证明以上确定的 Spray 不能被 Finsler 度量诱导. 利用反证法, 假设 G 可被 Finsler 度量 F 诱导. 利用 $R = KF^2$, $\tau_k = KFF_{,k}$ 代入 $R|y|_k = \tau_k |y|$, 可得:

$$KF(F|y|_k - F_{,k}|y|) = 0.$$

进一步化简可得:

$$KF^2 \left(\frac{|y|}{F} \right)_{,k} = 0.$$

可见, $K=0$ 或者 $|y| = \varepsilon(x)F$, 其中, $\varepsilon(x)$ 为数量函数. 由于 $R = KF^2 \neq 0$, 故排除 $K=0$. 此时, 形如 $F = |y|/\varepsilon(x)$ 求解得到 $P = -\varepsilon_{,k}(x)y^k/2\varepsilon(x)$ 是一个 1-形式, 与设定的射影因子 P 矛盾. 因此该情况下, G 不能被任意 Finsler 度量诱导, 并不具有迷向曲率.

参考文献:

- [1] Grifone J, Muzsnay Z. Sur le problème inverse du calcul des variations: existence de lagrangiens associés à un spray dans le cas isotrope[J]. Annales De l'Institut Fourier, 1999, 49(4):1387-1421.
- [2] Shen Z M. Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces[M]. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [3] Cheng X Y, Shen Z M. A comparison theorem on the Ricci curvature in projective geometry[J]. Annals of Global Analysis and Geometry, 2003, 23(2):141-155.
- [4] Muzsnay Z. The Euler-Lagrange PDE and Finsler metrizable[J]. Houston Journal of Mathematics, 2006, 32(1):79-98.
- [5] Yang G J. Some classes of sprays in projective spray geometry[J]. Differential Geometry and its Applications, 2011, 29(4):606-614.
- [6] Li B L, Shen Z M. Sprays of isotropic curvature[J]. International Journal of Mathematics, 2018, 29(1): 1850003.
- [7] Li Y, Mo X H, Yu Y Y. Inverse problem of sprays with scalar curvature[J]. International Journal of Mathematics, 2019, 30(9):1950041.
- [8] Douglas J. The general geometry of paths[J]. The Annals of Mathematics, 1927, 29(1/4):143-168.
- [9] Hamel G. Über die Geometrien in denen die Geraden die Kürzesten sind[J]. Mathematische Annalen, 1903, 57: 231-264.
- [10] 沈一兵, 沈忠民. 现代芬斯勒几何初步[M]. 北京: 高等教育出版社, 2013.
- [11] Berwald L. Über dien-dimensionalen Geometrien konstanter Krümmung, in denen die Geraden die kürzesten sind[J]. Mathematische Zeitschrift, 1929, 30: 449-469.

Construction of non-metrizable projectively flat Spray

LOU Yanwen, LI Benling*

(School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: The regularity of Hilbert's fourth problem concerns characterization of the projectively flat Finsler metric, and every Finsler metric induces a spray by its geodesic formula. This arouses attention to study the measurable problems of projectively flat spray. In this paper, we study the measurable problems of a class of projectively flat sprays, and construct two groups of projectively flat sprays by the linear combination of Euclidean metric and inner product. Next, using the proofs by contradiction and the definition of isotropic curvature for Spray, it is proved that the above Sprays are not induced by any Finsler metric and they are not of isotropic curvature.

Key words: Finsler metric; projectively flat; Spray; geodesic coefficient

(责任编辑 章践立)