

正交匹配追踪算法的迭代残差重建方法

付 敏, 王金平*

(宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 正交匹配追踪(Orthogonal Matching Pursuit, OMP)算法是一种重要的压缩感知重构算法. OMP 算法在每次迭代中选择与当前残差最相关的原子. 针对每次迭代需要重新计算残差的问题, 本文考虑偶数次迭代下残差未知的情况. 首先, 研究了奇数次迭代的残差与下一次迭代的残差之间的关系, 得到了一种偶数次迭代时选择原子的标准. 然后, 引入一种回溯机制来处理前面所得的迭代结果, 这种机制通过剔除其中多余的原子来实现精确重建. 据此, 提出了可减少计算残差的改进型正交匹配追踪算法.

关键词: 稀疏重构; OMP 算法; 回溯

中图分类号: O177.92

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2021) 01-0050-05

压缩感知(Compressed Sensing, CS)理论^[1]作为一种新的信号采样理论突破了传统 Nyquist 采样定理的限制, 它充分利用信号的稀疏性, 将高维信号没有损失地压缩采样成低维信号, 最后通过重构算法精确或高概率地重建原始信号. CS 理论主要涉及稀疏表示、测量矩阵、重构算法等 3 个核心方面. 其中, 重构算法是将 CS 理论推向实用化的关键之一. 目前, 重构算法主要分为 3 类: (1)基追踪算法, (2)贪婪算法, (3)组合算法. 这些算法中, 贪婪算法因其结构简单易实现的优势而得到了广泛应用. OMP 算法^[2]是一种常用的压缩感知贪婪算法. 以 OMP 算法为原型, 研究者们提出了很多改进算法, 例如对原子正则化的正则化正交匹配追踪(Regularized OMP, ROMP)算法^[3], 使用回溯思想的压缩采样匹配追踪(Compressive Sampling MP, CoSaMP)算法^[4]和子空间追踪(Subspace Pursuit, SP)算法^[5], 采用门限阈值的分段正交匹配追踪(Stage-wise OMP, StOMP)算法^[6], 还有稀疏度自适应的自适应匹配追踪(Sparsity Adaptive MP, SAMP)算法^[7]以及利用统计学方法来进行迭代预测的迭代预测匹配追踪(Iterative Forecast OMP, IFOMP)算法^[8]. 在前人研究的基础上, 本文对 OMP 算法加以改进,

得到相关结果.

1 预备知识

图像信号的可稀疏性指的是图像信号 a 经过变换矩阵得到 s -稀疏系数 x , 即

$$x = \psi^T a \text{ 或者 } a = Dx,$$

$\psi \in R^{n \times n}$ 是某种正交变换基(如 DCT 变换等), $D \in R^{n \times N}$ ($n \ll N$) 是过完备字典, s -稀疏系数 x 即 $s = \|x\|_0 < n$ ($\|x\|_0$ 表示 x 非零元素的个数).

测量矩阵 $\phi \in R^{m \times n}$ ($m < n$) 测量 a , 且 ϕ 与 ψ (或者 D) 不相干, 通过 ϕ 观测图像信号 a 得到测量信号 y , 即

$$y = \phi a = \phi \psi x = Ax \text{ 或者 } y = \phi a = \phi Dx = Ax.$$

通常把传感矩阵 A 的一个列称为一个原子. 原子库 $A = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]$, 其中 $a_i \in R^m$ 且 $\|a_i\|_2 = 1, i = 1, 2, \dots, n$.

CS 理论的核心问题是从少量线性观测 y 中重构原始信号 x , 其数学模型为

$$y = Ax,$$

该解不惟一, 而 CS 理论: 如果一个信号是稀疏的, 那么就可以用具有约束等距性(Restricted Isometry Property, RIP)的测量矩阵来观测该信号, 然后通过

收稿日期: 2020-06-01.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journalg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(62071262).

第一作者: 付敏(1997-), 女, 安徽合肥人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 积分变换与图像处理. E-mail: 2818391447@qq.com

*通信作者: 王金平(1962-), 男, 湖北武汉人, 博士/教授, 主要研究方向: 积分变换与图像处理. E-mail: wangjinping@nbu.edu.cn

求解一个优化问题就可重构原始信号^[1].

矩阵 A 满足 s 阶 RIP, 即

$$(1 - \delta_s) \|x\|_2^2 \leq \|Ax\|_2^2 \leq (1 + \delta_s) \|x\|_2^2, \forall \|x\|_0 \leq s,$$

δ_s ($0 < \delta_s < 1$) 是满足上式的最小常数, 通常把 δ_s 称为约束等距常数 (Restricted Isometry Constant, RIC). Baraniuk^[9] 证得如果变换矩阵 ψ 与观测矩阵 ϕ 不相干, 则传感矩阵 $A = \psi\phi$ 在很大概率上满足 RIP 性质.

由 CS 理论可知, 恢复稀疏信号即求解最优化问题:

$$\arg \min_x \|y - Ax\|_2 \text{ 满足 } \|x\|_0 \leq s. \quad (1)$$

要想获得最优解, 就要穷举 C_n^s 种可能的线性组合, 这是 NP-难问题. 鉴于此, 相关学者提出了一系列求得最优解的算法, 其中, 贪婪算法因其计算复杂度低、结构简单而颇受关注. OMP 算法是一种常用的贪婪算法, 它根据内积最大值选择最优原子, 并且利用最小二乘法来逼近信号, 这使得 OMP 算法相较于其他算法具有快速稳健的优势.

OMP 算法的基本思想是在每次迭代过程中, 选择与残差最相关的原子, 并将测量信号正交投影到已选原子集合生成的超平面上, 剩余部分作为新的残差, 继续迭代, 直到达到设置的迭代次数为止. OMP 算法的 k 阶模型为

$$y = \sum_{i=1}^k a_i x_i^{(k)} + r_k, \langle r_k, a_i \rangle = 0, i = 1, 2, \dots, k. \quad (2)$$

正交匹配追踪算法过程如下.

输入: 传感矩阵 A 、稀疏度 s 、采样信号 y .

输出: x 的稀疏逼近 $x^{(s)}$.

初始化: 残差 $r_0 = y$, 索引集 $A_0 = \emptyset$, $A_{A_0} = \emptyset$, 令迭代次数 $k = 1$.

循环执行各步骤:

步骤 1 找出残差 r_{k-1} 和传感矩阵的列 a_j 内积中最大值所对应的脚标 λ_k , 即

$$\lambda_k = \arg \max_{j=1,2,\dots,n} |\langle r_{k-1}, a_j \rangle|.$$

步骤 2 更新索引集 $A_k = A_{k-1} \cup \{\lambda_k\}$, 记录已选原子组成的矩阵 $A_{A_k} = [A_{A_{k-1}} \quad a_{\lambda_k}]$.

步骤 3 由最小二乘得到

$$x^{(k)} = \arg \min_x \|y - A_{A_k} x\|_2.$$

步骤 4 更新残差 $r_k = y - A_{A_k} x^{(k)}$.

步骤 5 判断 $k > s$ 是否满足, 若满足, 则停止迭代; 若不满足, 则执行步骤 1.

由步骤 1, OMP 算法原子选择标准是选择与残差内积绝对值最大的那个原子, 即

$$|\langle r_{k-1}, a_{\lambda_k} \rangle| \geq |\langle r_{k-1}, a_j \rangle|, j \neq \lambda_k.$$

由步骤 3, 只有 y 正交投影到已选原子集合张成的超平面上, 残差值才能最小, 即

$$\langle y - A_{A_k} x^{(k)}, A_{A_k} \rangle = 0,$$

可得

$$x^{(k)} = (A_{A_k}^T A_{A_k})^{-1} A_{A_k}^T y = A_{A_k}^\dagger y. \quad (3)$$

注意到 $x^{(k)} \in R^{|A_k|}$ ($|A_k|$ 为索引集 A_k 的元素个数), 因此, $x^{(s)}$ 是重建信号 x 的非零分量对应位置的截取部分, 即 $x|_{A_s} = x^{(s)}$, $x^{(s)}|_{\{1,2,\dots,n\} \setminus A_s} = \vec{0}$.

由式(3), 步骤 4 中残差 r_k 进一步有

$$r_k = y - A_{A_k} x^{(k)} = y - A_{A_k} A_{A_k}^\dagger y. \quad (4)$$

结论 1 $A_{A_k}^\dagger A_{A_k} = I$, $I \in R^{|A_k| \times |A_k|}$ 为单位矩阵.

证明 由式(3)得 $(A_{A_k}^T A_{A_k})^{-1} A_{A_k}^T A_{A_k} = I$.

结论 2 残差与已选原子集合的正交性, $A_{A_k}^T r_k = \vec{0}$, $\vec{0} \in R^{|A_k|}$ 为零向量.

证明 由式(4)得 $A_{A_k}^T r_k = A_{A_k}^T (y - A_{A_k} A_{A_k}^\dagger y) = \vec{0}$.

由结论 2, 发现残差与前面已选的原子都是正交的, 这可避免重复选用原子.

2 主要结果

本节主要研究相邻两次迭代残差间的关系, 从而给出一种等价的原子选择标准, 迭代结束后, 加入一种回溯机制来处理迭代结果.

定理 1 设 $B = \begin{bmatrix} \bar{B} & v \\ v^T & c \end{bmatrix} \in R^{n \times n}$, 其中 $v \in R^{n-1}$,

c 为常数. 若对称正定矩阵 $\bar{B}$ 的 Cholesky 分解为 $\bar{B} = \bar{L}\bar{L}^T \in R^{(n-1) \times (n-1)}$, 则正定矩阵 B 的 Cholesky 分解为 $B = LL^T$, 其中 $L = \begin{bmatrix} \bar{L} & \vec{0} \\ w^T & \sqrt{c - w^T w} \end{bmatrix}$, $w = \bar{L}^{-1} v$.

证明 设 $L = \begin{bmatrix} L_1 & \vec{0} \\ w^T & t \end{bmatrix}$, 其中下三角矩阵

$L_1 \in R^{(n-1) \times (n-1)}$, 向量 $w \in R^{n-1}$, t 为常数, 则由

$$B = LL^T = \begin{bmatrix} L_1 & \vec{0} \\ w^T & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1^T & w \\ \vec{0}^T & t \end{bmatrix} =$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{c} -\frac{1}{\|\gamma_k\|_2^2} A_{\lambda_k}^\dagger a_{k+1} \\ \frac{1}{\|\gamma_k\|_2^2} \end{array} \right]. \quad (7)$$

将式(7)代入式(6), 得到

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(k)} \\ 0 \end{bmatrix} + (A_{\lambda_{k+1}}^\top A_{\lambda_{k+1}})^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{k+1}^\top \mathbf{r}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(k)} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{a_{k+1}^\top \mathbf{r}_k}{\|\gamma_k\|_2^2} \begin{bmatrix} -A_{\lambda_k}^\dagger a_{k+1} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

定理 4 在 OMP 算法中, 设第 $k+2$ 次迭代选择的原子是 $a_{\lambda_{k+2}}$, 若

$$\lambda_{k+2} = \arg \max_{\lambda_{k+2}=1,2,\dots,n} \left| \left\langle \mathbf{r}_k, a_{\lambda_{k+2}} \right\rangle - \frac{a_{k+1}^\top \mathbf{r}_k}{\|\gamma_k\|_2^2} \left\langle \gamma_k, a_{\lambda_{k+2}} \right\rangle \right|,$$

则在第 $k+1$ 次迭代, $a_{\lambda_{k+2}}$ 是下一步迭代选择的原子.

证明 由定理 3 得

$$\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k+1} = A_{\lambda_{k+1}} \left[\mathbf{x}^{(k+1)} - \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(k)} \\ 0 \end{bmatrix} \right] = \frac{a_{k+1}^\top \mathbf{r}_k}{\|\gamma_k\|_2^2} \begin{bmatrix} A_{\lambda_k} & a_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_1^{(k)} \\ \vdots \\ -b_k^{(k)} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{a_{k+1}^\top \mathbf{r}_k}{\|\gamma_k\|_2^2} \gamma_k, \quad (8)$$

从而有

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \mathbf{r}_{k+1}, a_{\lambda_{k+2}} \right\rangle \right| &= \left| \left\langle \mathbf{r}_k - (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k+1}), a_{\lambda_{k+2}} \right\rangle \right| = \\ &= \left| \left\langle \mathbf{r}_k, a_{\lambda_{k+2}} \right\rangle - \left\langle \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k+1}, a_{\lambda_{k+2}} \right\rangle \right| = \\ &= \left| \left\langle \mathbf{r}_k, a_{\lambda_{k+2}} \right\rangle - \frac{a_{k+1}^\top \mathbf{r}_k}{\|\gamma_k\|_2^2} \left\langle \gamma_k, a_{\lambda_{k+2}} \right\rangle \right|. \end{aligned}$$

因此, 在所有原子与残差 $\mathbf{r}_{k+1}$ 做内积绝对值中,

$\left| \left\langle \mathbf{r}_{k+1}, a_{\lambda_{k+2}} \right\rangle \right|$ 最大, 也即 $\left| \left\langle \mathbf{r}_k, a_{\lambda_{k+2}} \right\rangle - \frac{a_{k+1}^\top \mathbf{r}_k}{\|\gamma_k\|_2^2} \left\langle \gamma_k, a_{\lambda_{k+2}} \right\rangle \right|$ 最大. 故在第 $k+1$ 次迭代时, 只需要找到使得 $\left| \left\langle \mathbf{r}_k, a_i \right\rangle - \frac{a_{k+1}^\top \mathbf{r}_k}{\|\gamma_k\|_2^2} \left\langle \gamma_k, a_i \right\rangle \right|$ 最大的原子, 便可确定下一步迭代的原子.

偶数次迭代时, OMP 算法的原子选择标准替

换成上述的原子选择标准. 迭代结束后, 待重建信号 $\mathbf{x}^{(s+1)}$ 的初系数估计向量 $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_{s+1})$, 其对应的原子有 $s+1 (> s)$ 个, 可见存在误选原子. 为获得精确重建, 本文引入一种回溯机制即剔除多余原子, 使剩余原子个数与稀疏度相同.

首先将系数向量归一化, $\bar{\mathbf{c}} = \left(\frac{c_1}{|\mathbf{c}|}, \frac{c_2}{|\mathbf{c}|}, \dots, \frac{c_{s+1}}{|\mathbf{c}|} \right)$, 将分量绝对值从大到小依次排列, 截取前面 s 个分量, 从而获得新的系数向量 $\bar{\mathbf{c}} = \left(\frac{c_{i1}}{|\mathbf{c}|}, \frac{c_{i2}}{|\mathbf{c}|}, \dots, \frac{c_{is}}{|\mathbf{c}|} \right)$ 和对应的原子集合.

改进的正交匹配追踪算法如下.

输入: 传感矩阵 A , 稀疏度 s , 采样信号 $\mathbf{y}$.

输出: $\mathbf{x}$ 的稀疏逼近 $\hat{\mathbf{x}}^{(s)}$.

初始化: 残差 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{y}$, 索引集 $\Lambda_0 = \emptyset$, $A_{\Lambda_0} = \emptyset$, 令迭代次数为 $k+1$.

步骤 1 找出残差 $\mathbf{r}_{k-1}$ 和传感矩阵 A 的列 a_j 内积中最大值所对应的脚标 λ_k , 即

$$\lambda_k = \arg \max_{\lambda_k=1,2,\dots,n} \left| \left\langle \mathbf{r}_{k-1}, a_{\lambda_k} \right\rangle \right|.$$

步骤 2 更新索引集 $\Lambda_k = \Lambda_{k-1} \cup \lambda_k$, 更新残差 $\mathbf{r}_k$, $\mathbf{r}_k = \min \|\mathbf{y} - A_{\Lambda_k} \bar{\mathbf{x}}\|_2$.

步骤 3 找出残差 $\mathbf{r}_k$ 和传感矩阵 A 的列 a_i 内积中最大值所对应的脚标 λ_{k+1} , 即

$$\lambda_{k+1} = \arg \max_{\lambda_{k+1}=1,2,\dots,n} \left| \left\langle \mathbf{r}_k, a_{\lambda_{k+1}} \right\rangle \right|.$$

步骤 4 找出残差 $\mathbf{r}_k$ 和传感矩阵 A 的列 a_i 满足下面关系所对应的脚标 λ_{k+2} ,

$$\lambda_{k+2} = \arg \max_{\lambda_{k+2}=1,2,\dots,n} \left| \left\langle \mathbf{r}_k, a_{\lambda_{k+2}} \right\rangle - \frac{a_{k+1}^\top \mathbf{r}_k}{\|\gamma_k\|_2^2} \left\langle \gamma_k, a_{\lambda_{k+2}} \right\rangle \right|.$$

步骤 5 更新索引集 $\Lambda_{k+2} = \Lambda_k \cup \lambda_{k+1} \cup \lambda_{k+2}$, 迭代系数 $\mathbf{x}^{(k+2)}$ 为

$$\mathbf{x}^{(k+2)} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{y} - A_{\Lambda_{k+2}} \mathbf{x}\|_2.$$

步骤 6 更新残差 $\mathbf{r}_{k+2} = \mathbf{y} - A \mathbf{x}^{(k+2)}$, 更新迭代次数 $k = k+2$.

步骤 7 当 s 为奇数时, 若 $k > s+1$, 则执行步骤 8, 否则, 继续执行步骤 3; 当 s 为偶数时, 若 $k > s+2$, 则执行步骤 9, 否则, 继续执行步骤 3.

步骤 8 将向量 $\mathbf{x}^{(s+1)}$ 归一化得向量 $\bar{\mathbf{x}}^{(s+1)}$, 再将 $\bar{\mathbf{x}}^{(s+1)}$ 分量的绝对值从大到小依次排列, 选取前

面 s 个分量所对应的原子组成的矩阵 A_Ω , 输出结果 $\hat{x}^{(s)}$ 可用最小二乘法得到,

$$\hat{x}^{(s)} = \arg \min_x \|y - A_\Omega x\|_2.$$

步骤 9 将向量 $x^{(s+2)}$ 归一化得向量 $\bar{x}^{(s+2)}$, 再将 $\bar{x}^{(s+2)}$ 分量的绝对值从大到小依次排列, 选取前面 s 个分量所对应的原子组成的矩阵 A_Ω , 输出结果 $\hat{x}^{(s)}$ 可用最小二乘法得到,

$$\hat{x}^{(s)} = \arg \min_x \|y - A_\Omega x\|_2.$$

3 总结

本文利用 Cholesky 迭代式分解, 得到 OMP 算法中相邻两次迭代残差间的关系, 可减少计算残差的次数. 迭代结束后, 通过引入回溯机制来对原子进行二次筛选, 从而实现精确重构.

参考文献:

- [1] Donoho D L. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4):1289-1306.
- [2] Tropp J A, Gilbert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 53(12):4655-4666.
- [3] Needell D, Vershynin R. Signal recovery from incomplete and inaccurate measurements via regularized orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2010, 4(2):310-316.
- [4] Needell D, Tropp J A. CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2009, 26(3):301-321.
- [5] Dai W, Milenkovic O. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2009, 55(5):2230-2249.
- [6] Donoho D L, Tsaig Y, Drori I, et al. Sparse solution of underdetermined systems of linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2012, 58(2):1094-1121.
- [7] Do T T, Gan L, Nguyen N, et al. Sparsity adaptive matching pursuit algorithm for practical compressed sensing[C]. Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers, 2008:581-587.
- [8] 刘学文, 肖嵩, 王玲, 等. 迭代预测正交匹配追踪算法[J]. 信号处理, 2017, 33(2):178-184.
- [9] Baraniuk R G. Compressive sensing[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2007, 24(4):118-121.

An iterative residual reconstruction method of the orthogonal matching pursuit algorithm

FU Min, WANG Jinping*

(School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: Orthogonal Matching Pursuit (OMP) is an important compressed sensing reconstruction algorithm. The OMP algorithm selects the atoms which are most associated to the current residual in each iteration. For the problem of recalculating the residual in each iteration, we consider the case where the residual of even number iterations is unknown. First, we study the relationship between the residuals of odd number iterations and the residuals of the next iteration followed by obtaining a benchmark for selecting atoms in even number iterations. Then we introduce a backtracking mechanism to process the results of previous iterations. The mechanism achieves the precise reconstruction by removing the extra atoms. An improved orthogonal matching pursuit algorithm is thus presented in this study.

Key words: sparse reconstruction; OMP algorithm; backtracking

(责任编辑 韩 超)