

模糊厌恶下含汇率风险的最优投资策略

李全, 徐松, 王伟*

(宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 研究了模糊厌恶和指数效用情形下含汇率风险的稳健最优投资问题. 假定投资者是模糊厌恶且可投资无风险债券、国外股票和国内股票3种资产, 在最大化终端财富期望效用的目标下, 通过随机动态规划原理得到相应的 HJB (Hamilton-Jacobi-Bellman) 方程, 然后通过求解 HJB 方程和一阶最优条件得到模糊厌恶和模糊中性2种情形下最优投资策略的解析解, 最后给出数值结果和经济学解释. 结果表明, 模糊厌恶程度和汇率风险对最优投资策略影响较大.

关键词: 模糊厌恶; 汇率风险; 最优投资组合

中图分类号: O211.9

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2021) 02-0102-07

跨国投资是投资者将自己拥有的资金投资于2个或2个以上国家, 因此投资者必须面对本国货币与外币之间的汇率风险. 近年来, 随着国际金融环境波动和贸易战升级, 汇率波动愈加频繁, 这也直接影响了跨国投资的资产配置. 由于汇率风险在跨国投资等涉及外汇的业务中扮演重要角色, 因此研究汇率风险下的最优投资问题是金融市场的一个实际问题, 具有重要意义.

在汇率风险下的最优投资研究中, 闫伟等^[1]利用跳跃扩散过程描述了市场汇率动态, 研究了均值-方差模型下的连续时间最优投资组合. 费为银等^[2-3]认为企业进行跨国投资时, 会面临奈特不确定, 即对要投资国家的经济变量无法准确知道, 为此研究了奈特不确定和存在汇率风险时的最优投资和税收政策; 研究假定汇率动态满足几何布朗运动, 但市场中可投资的风险资产满足跳扩散过程, 在终端财富效用最大化准则下, 利用 HJB (Hamilton-Jacobi-Bellman) 方程得到了最优投资策略. Guo 等^[4]考虑一家保险公司可投资国内外市场中的无风险债券和风险资产, 首次研究了汇率风险下保险公司的最优投资和再保险, 利用扩散过程来近似保险公司索赔过程, 从而降低了模型的复杂性. 黄婵等^[5]在文献[4]基础上, 进一步考虑了

保险公司的索赔过程满足经典的跳扩散模型, 研究了保险公司在指数效用下的最优投资和最优再保险策略. 与文献[1]和文献[3]不同, 邢钰等^[6]考虑了汇率动态满足跳扩散过程, 研究了常相对风险厌恶效用(CRRA)下的最优投资, 且假定汇率和风险资产动态都满足跳扩散过程, 并通过求解偏微分方程得到了最优投资策略的近似解.

上述研究都是在模糊中性环境下开展, 而实际复杂多样的市场因素会影响模型的误定, 投资者会担心模型的误定对投资策略产生较大影响, 因此需要寻求稳健的投资决策. Ellsberg^[7]第一个指出大多数人都是模糊厌恶的, 大量实证也证明模糊厌恶影响了投资者的投资行为^[8-9]. Maenhout^[10]首次将模糊厌恶的概念应用到资产定价和最优投资组合领域, 并考虑了模糊厌恶情形下最优投资和资产定价问题. Branger 等^[11]假定市场中的风险资产价格满足跳扩散模型, 研究了不同程度的模糊厌恶对最优投资策略的影响. Zeng 等^[12]假定市场中存在可投资的欧式衍生产品, 研究了在模糊厌恶环境下确定缴费型养老金的最优投资问题. Sun 等^[13]假设保险公司的盈余过程服从经典的 Cramér-Lundberg 模型, 得到了模糊厌恶下稳健最优投资和再保险策略的解析解. Zhang 等^[14]考虑了

收稿日期: 2020-07-17.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journal1g.nbu.edu.cn/>

基金项目: 教育部人文社科基金(18YJC910012); 浙江省教育厅科研项目(Y201430940); 宁波市自然科学基金(202003N4144).

第一作者: 李全(1996-), 女, 贵州毕节人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 金融数学. E-mail: 2441237380@qq.com

*通信作者: 王伟(1982-), 男, 安徽安庆人, 博士/教授, 主要研究方向: 金融数学. E-mail: wangwei2@nbu.edu.cn

金融市场中存在可投资的信用债券情形, 研究了模糊厌恶环境下稳健最优投资和比例的再保险. Wang 等^[15]研究了2家竞争性保险公司之间非零和随机微分博弈问题, 利用随机动态规划和验证定理得到了稳健的纳什均衡再保险和投资策略. 然而, 以上文献都没有在模糊厌恶环境下考虑汇率风险的影响, 而实际上投资者的模糊厌恶态度和汇率风险都会影响其对跨国企业的投资选择. 因此, 考虑模糊厌恶下含汇率风险的最优投资组合具有重要意义.

本研究同时考虑金融市场存在汇率风险且投资者是模糊厌恶的, 利用几何布朗运动刻画汇率动态, 研究模糊厌恶下含汇率风险的最优投资, 并利用随机动态规划原理得到了最优投资策略的解析解, 且给出了数值算例和经济学解释.

1 金融市场模型

1.1 金融资产的价格动态

考虑一个无摩擦且无套利的金融市场, 市场中的投资者在 $[0, T]$ 时间段内可连续进行交易, 不考虑交易费用. 在一个带 σ 域流的完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (F_t)_{0 \leq t \leq T}, P)$ 中, 定义随机过程 $\{W_i(t), i = 1, 2, 3\}_{t \in [0, T]}$ 是三维标准布朗运动. 假定金融市场中有3种可投资资产, 1种是无风险债券 B , 另外2种是股票 S^d 和 S^f , 其中 S^d 表示国内上市公司的股票, S^f 表示国外上市公司的股票.

假定无风险债券 $B := \{B(t)\}_{t \in [0, T]}$ 的价格过程满足如下微分方程:

$$dB(t) = r_d B(t) dt, \quad (1)$$

其中: $r_d > 0$ 表示国内银行的无风险利率.

股票 $S^d := \{S^d(t)\}_{t \in [0, T]}$ 和 $S^f := \{S^f(t)\}_{t \in [0, T]}$ 的价格过程分别满足如下随机微分方程:

$$\begin{aligned} dS^d &= S^d(t) (\mu_d dt + \sigma_d dW_1(t)), \\ dS^f &= S^f(t) (\mu_f dt + \sigma_f dW_2(t)), \end{aligned} \quad (2)$$

其中: μ_d 与 μ_f 分别表示股票 $S^d(t)$ 和股票 $S^f(t)$ 的平均回报率; σ_d 与 σ_f 分别表示股票 $S^d(t)$ 和 $S^f(t)$ 的波动率.

令 $R := \{R(t)\}_{t \in [0, T]}$ 表示汇率风险过程, 满足如下方程:

$$dR(t) = R(t) \left[(r_d - r_f) dt + \rho_1 \theta dW_1(t) + \right.$$

$$\left. \rho_2 \theta dW_2(t) + \sqrt{1 - \rho_1^2 - \rho_2^2} \theta dW_3(t) \right],$$

其中: θ 是汇率风险过程 $R(t)$ 的波动率; r_f 是国外银行的无风险利率; $\rho_1 \in [0, 1]$, $\rho_2 \in [0, 1]$, 且 $\rho_1^2 + \rho_2^2 \in [0, 1]$.

令 $S(t) = S^f(t)R(t)$, 则利用 Itô 公式可得:

$$dS(t) = S^f(t) dR(t) + R(t) dS^f(t) + d\langle S^f, R \rangle_t =$$

$$S(t) \left[\mu dt + \rho_1 \theta dW_1(t) + (\sigma_f + \rho_2 \theta) dW_2(t) + \sqrt{1 - \rho_1^2 - \rho_2^2} \theta dW_3(t) \right], \quad (3)$$

其中: $\mu = r_d - r_f + \mu_f + \rho_2 \sigma_f \theta$; $\langle S^f, R \rangle_t$ 表示 $S(t)$ 和 $R(t)$ 的二次变差.

1.2 财富过程

假设 $\pi_s^d(t)$ 和 $\pi_s(t)$ 分别表示投资到国内股票 S^d 和外国股票 S^f 的财富金额. 令 $X^\pi(t)$ 表示在策略 $\pi(t) := (\pi_s^d(t), \pi_s(t))$ 下 t 时刻财富金额, $X^\pi(0) = x_0$ 表示初始财富值, 则 $X^\pi(t) - \pi_s^d(t) - \pi_s(t)$ 表示投资到无风险债券 B 上的财富数量. 假设不考虑交易成本和消费, 在策略 π 下财富过程 $X^\pi(t)$ 满足如下随机微分方程:

$$\begin{aligned} dX^\pi(t) &= \frac{\pi_s^d(t)}{S^d(t)} dS^d(t) + \frac{\pi_s(t)}{S(t)} dS(t) + \\ &\quad \frac{X^\pi(t) - \pi_s^d(t) - \pi_s(t)}{B(t)} dB(t), \end{aligned} \quad (4)$$

将式(1)~(3)代入方程(4), 整理可得:

$$\begin{aligned} dX^\pi(t) &= \left[X(t) r_d + \pi_s^d(t) (\mu_d - r_d) + \pi_s(t) \cdot \right. \\ &\quad \left. (\mu_f - r_f + \rho_2 \theta \sigma_f) \right] dt + \\ &\quad \left(\pi_s^d(t) \sigma_d + \pi_s(t) \rho_1 \theta \right) dW_1(t) + \\ &\quad \pi_s(t) (\sigma_f + \rho_2 \theta) dW_2(t) + \\ &\quad \pi_s(t) \sqrt{1 - \rho_1^2 - \rho_2^2} \theta dW_3(t). \end{aligned} \quad (5)$$

定义 1(可允许策略) 假设 $\pi(t) := \{\pi_s^d(t), \pi_s(t)\}_{t \in [0, T]}$ 是 $(F_t)_{t \in [0, T]}$ 循序可测的, 且满足:

$$E^P \left[\int_0^\infty \left(|\pi_s^d(t)|^2 + |\pi_s(t)|^2 \right) dt \right] < \infty,$$

其中: $E^P[\cdot]$ 表示在概率测度 P 下的期望.

如果方程(7)存在唯一强解, 则称策略 $\pi(t) := \{\pi_s^d(t), \pi_s(t)\}_{t \in [0, T]}$ 是一个可允许策略.

记所有的可允许策略 $\pi(t)$ 的集合为 Π . 对于投资者, 希望找到最优投资策略使其终端财富的期望效用最大, 即

$$J^\pi(t, x) = \sup_{\pi \in \Pi} E^P \left[U(X^\pi(T)) \middle| X^\pi(t) = x \right],$$

其中: $E^P[\bullet | X^\pi(t) = x]$ 表示在概率测度 P 下的条件期望.

然而, 若投资者是模糊厌恶的, 即对概率测度 P 的估计存在模糊性, 为了解决模型的不确定问题, 利用文献[10]方法, 即用稳健最优控制理论研究模型不确定性问题对投资组合策略的影响.

令 $\phi(t)$ 的集合为 Φ , 定义一个循序可测过程 $\phi(t) = \{\phi_i(t), i=1, 2, 3\}$, 且 $\phi(t)$ 满足如下条件:

- (i) $\phi(t)$ 是 F_t 可测的;
- (ii) $E^P \left[\exp \left((1/2) \int_0^T \|\phi(t)\|^2 dt \right) \right] < \infty$,

其中: $E^P[\bullet]$ 表示在概率测度 P 下的期望.

令 $dQ/dP = \Lambda^\phi(t)$ 满足如下方程:

$$\begin{aligned} \Lambda^\phi(t) = \exp \left\{ - \int_0^t \phi_1(s) dW_1(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \phi_1^2(u) du - \right. \\ \left. \int_0^t \phi_2(u) dW_2(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \phi_2^2(u) du - \right. \\ \left. \int_0^t \phi_3(u) dW_3(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \phi_3^2(u) du \right\}. \end{aligned}$$

由哥萨诺夫定理可知:

$$dW_i^Q(t) = dW_i(t) + \phi_i(t)dt, i=1, 2, 3, \quad (6)$$

其中: $\{W_i^Q(t), i=1, 2, 3\}_{t \in [0, T]}$ 是概率测度 Q 下的标准三维布朗运动. 因此, 在概率测度 Q 下, 国内与国外股票的价格动态过程分别满足:

$$\begin{aligned} dS^d(t) &= S^d(t) \left[(\mu_d - \phi_1(t)\sigma_d)dt + \sigma_d dW_1^Q(t) \right], \\ dS(t) &= S(t) \left[\left(\mu_f - \rho_1\theta\phi_1(t) - (\sigma_f + \rho_2\theta)\phi_2(t) - \right. \right. \\ &\quad \left. \sqrt{1 - \rho_1^2 - \rho_2^2}\theta\phi_3(t) \right) dt + \rho_1\theta dW_1^Q(t) + \\ &\quad \left. (\sigma_f + \rho_2\theta) dW_2^Q(t) + \sqrt{1 - \rho_1^2 - \rho_2^2}\theta dW_3^Q(t) \right], \end{aligned}$$

结合式(6), 投资者财富动态过程式(5)可表示为:

$$\begin{aligned} dX^\pi(t) &= \left[X(t)r_d + \pi_s^d(t)(\mu_d - r_d) + \pi_s(t)(\mu_f - \right. \\ &\quad \left. r_f + \rho_2\theta\sigma_f) - (\pi_s^d(t)\sigma_d + \pi_s(t)\rho_1\theta)\phi_1(t) - \right. \\ &\quad \left. \pi_s(t)(\sigma_f + \rho_2\theta)\phi_2(t) - \pi_s(t)\sqrt{1 - \rho_1^2 - \rho_2^2} \cdot \right. \\ &\quad \left. \theta\phi_3(t) \right] dt + (\pi_s^d(t)\sigma_d + \pi_s(t)\rho_1\theta) dW_1^Q(t) + \\ &\quad \pi_s(t)(\sigma_f + \rho_2\theta) dW_2^Q(t) + \\ &\quad \pi_s(t)\sqrt{1 - \rho_1^2 - \rho_2^2}\theta dW_3^Q(t). \end{aligned} \quad (7)$$

2 指数效用下的最优投资策略

假设投资者的效用函数 $U(x)$ 服从指数效用函数, 满足:

$$U(x) = -(1/m)e^{-mx},$$

其中: $m > 0$ 是绝对风险厌恶系数.

采用文献[10]方法, 选取最坏情形下的最优投资策略, 使得投资者的终期财富的期望效用达到最大化, 其最优化问题为:

$$\sup_{\pi(t) \in \Pi} \left\{ \inf_{\phi(t) \in \Phi} E^Q \left[\left(U(X^\pi(T)) + \int_t^T \Psi(u, X^\pi(u), \phi(u)) du \right) \middle| X^\pi(t) = x \right] \right\}, \quad (8)$$

其中: $E^Q[\bullet | X^\pi(t) = x]$ 表示在测度 Q 下的条件期望, $\Psi(u, X^\pi(u), \phi(u))$ 是惩罚函数, 由文献[10]可知其表达式为:

$$\begin{aligned} \Psi(u, X^\pi(u), \phi(u)) &= \|\phi(u)\|^2 / (2\varphi(u, X^\pi(u))), \\ \varphi(u, X^\pi(u)) &= \beta / (J(u, x)m), \end{aligned}$$

其中: β 可以理解成稳健性偏好或者是模型不确定性的厌恶程度, 是一个常数, 度量了投资者对模型的信任程度; m 是绝对风险厌恶系数, 度量投资者对风险的承受能力. 为了解决问题(式(8)), 定义值函数为:

$$\begin{aligned} J(t, x) &= \sup_{\pi(t) \in \Pi} \left\{ \inf_{\phi(t) \in \Phi} E^Q \left[\left(U(X^\pi(T)) + \int_t^T \Psi(u, X^\pi(u), \phi(u)) du \right) \middle| X^\pi(t) = x \right] \right\}, \end{aligned}$$

再利用随机动态规划原理, 得到值函数 $J(t, x)$ 满足如下 HJB 方程:

$$\begin{aligned} \sup_{\pi(t) \in \Pi} \left\{ \inf_{\phi(t) \in \Phi} \left[D^{\phi, \pi} J(t, x) - mJ(t, x) \cdot \right. \right. \\ \left. \left. (\phi_1(t)^2 + \phi_2(t)^2 + \phi_3(t)^2) / (2\beta) \right] \right\} = 0, \quad (9) \end{aligned}$$

边界条件为 $J(T, x) = U(x)$, 微分算子 $D^{\phi, \pi} J(t, x)$ 满足:

$$\begin{aligned} D^{\phi, \pi} J(t, x) &= J_t + J_x \left[X(t)r_d + \pi_s^d(t)(\mu_d - r_d) + \right. \\ &\quad \left. \pi_s(t)(\mu_f - r_f + \rho_2\theta\sigma_f) - (\pi_s^d(t)\sigma_d + \pi_s(t)\rho_1\theta) \cdot \right. \\ &\quad \left. \phi_1(t) - \pi_s(t)(\sigma_f + \rho_2\theta)\phi_2(t) - \right. \\ &\quad \left. \pi_s(t)\sqrt{1 - \rho_1^2 - \rho_2^2}\theta\phi_3(t) \right] + (1/2)J_{xx} \cdot \\ &\quad \left[(\pi_s^d(t)\sigma_d + \pi_s(t)\rho_1\theta)^2 + \pi_s(t)^2(\sigma_f + \rho_2\theta)^2 + \right. \end{aligned}$$

$$\pi_s(t)^2(1-\rho_1^2-\rho_2^2)\theta^2\Big],$$

其中: J_t 是函数 $J(t, x)$ 关于 t 的一阶导数; J_x 和 J_{xx} 分别是函数 $J(t, x)$ 关于 x 的一阶和二阶导数.

定理 1 当投资者的效用函数为指数效用时, 值函数 $J(t, x)$ 满足:

$$J(t, x) = -(1/m)\exp\left(-mxe^{r_d(T-t)} + A(t)\right),$$

其中:

$$A(t) = \frac{m(T-t)}{2\sigma_d^2(m+\beta)} \left\{ (\mu_d - r_d)^2 - M \left[(\mu_f - r_f + \rho_2\theta\sigma_f)\sigma_d - (\mu_d + r_d)\rho_1\theta + 2\sigma_d \cdot (\rho_1\theta - \sigma_d(\mu_f - r_f + \rho_2\theta\sigma_f)) \right] \right\}, \quad (10)$$

$$M = \frac{(\mu_f - r_f + \rho_2\theta\sigma_f)\sigma_d - (\mu_d + r_d)\rho_1\theta}{\sigma_f^2 + 2\sigma_f\rho_2\theta + (1-\rho_1^2)\theta^2}, \quad (11)$$

投资者的最优投资策略为:

$$\pi_s^{d*}(t) = \frac{(\mu_d - r_d - \rho_1\theta M)e^{-r_d(T-t)}}{(m+\beta)\sigma_d^2},$$

$$\pi_s^*(t) = \frac{Me^{-r_d(T-t)}}{(m+\beta)\sigma_d},$$

$\phi^*(t)$ 值为:

$$\phi_1^*(t) = \frac{(\mu_d - r_d)\beta}{(m+\beta)\sigma_d}, \quad \phi_2^*(t) = \frac{(\sigma_f + \rho_2\theta)\beta M}{(m+\beta)\sigma_d},$$

$$\phi_3^*(t) = \frac{\sqrt{1-\rho_1^2-\rho_2^2}\theta\beta M}{(m+\beta)\sigma_d}.$$

证明 根据指数效用函数的形式, 首先猜测 $J(t, x)$ 满足:

$$J(t, x) = -(1/m)\exp\left(-mxe^{r_d(T-t)} + A(t)\right), \quad (12)$$

其中: $A(t)$ 是关于 t 的函数.

此外, 由边界条件 $J(T, x) = U(x)$, 可得 $A(T) = 0$.

为计算方便, 将 HJB 方程写为:

$$\begin{aligned} \sup_{\pi(t) \in \pi} \left\{ \inf_{\phi(t) \in \Phi} \left(J_t + J_x \left[X(t)r_d + \pi_s^d(t)(\mu_d - r_d) + \pi_s(t)(\mu_f - r_f + \rho_2\theta\sigma_f) - (\pi_s^d(t)\sigma_d + \pi_s(t)\rho_1\theta) \cdot \phi_1(t) - \pi_s(t)(\sigma_f + \rho_2\theta)\phi_2(t) - \pi_s(t)\sqrt{1-\rho_1^2-\rho_2^2}\theta\phi_3(t) \right] + \frac{1}{2}J_{xx} \cdot \left[(\pi_s^d(t)\sigma_d + \pi_s(t)\rho_1\theta)^2 + \pi_s(t)^2(\sigma_f + \rho_2\theta)^2 + \pi_s(t)^2(1-\rho_1^2-\rho_2^2)\theta^2 \right] - mJ(t, x) \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\left(\phi_1(t)^2 + \phi_2(t)^2 + \phi_3(t)^2 \right) / (2\beta) \Big\}, \quad (13)$$

对式(12)两边分别关于 t 和 x 求一阶导数和关于 x 求二阶导数可得:

$$\begin{aligned} J_t &= J(t, x) \left(r_d m x e^{r_d(T-t)} + A_t \right), \\ J_x &= J(t, x) \left(-m e^{r_d(T-t)} \right), \\ J_{xx} &= J(t, x) \left(m^2 e^{2r_d(T-t)} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

将式(12)和(14)代入式(13), 通过一阶最优条件可得 $\phi^*(t)$ 的表达式为:

$$\phi_1^*(t) = e^{r_d(T-t)} \left(\pi_s^d(t)\sigma_d + \pi_s(t)\rho_1\theta \right) \beta, \quad (15)$$

$$\phi_2^*(t) = e^{r_d(T-t)} \pi_s(t)(\sigma_f + \rho_2\theta) \beta, \quad (16)$$

$$\phi_3^*(t) = e^{r_d(T-t)} \pi_s(t) \sqrt{1-\rho_1^2-\rho_2^2} \theta \beta, \quad (17)$$

将式(15)~(17)代入式(13), 得到:

$$\begin{aligned} \sup_{\pi(t) \in \pi} \left\{ A_t - m e^{r_d(T-t)} \left[\pi_s^d(t)(\mu_d - r_d) + \pi_s(t) \cdot (\mu_f - r_f + \rho_2\theta\sigma_f) \right] + \frac{1}{2} m(m+\beta) e^{2r_d(T-t)} \cdot \left[(\pi_s^d(t)\sigma_d + \pi_s(t)\rho_1\theta)^2 + (\pi_s(t)^2 \cdot (\sigma_f^2 + 2\sigma_f\rho_2\theta + (1-\rho_1^2)\theta^2)) \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

再由式(18)和一阶最优条件可得最优投资策略 $\pi_s^d(t)$ 和 $\pi_s(t)$ 值满足:

$$\begin{aligned} \pi_s^{d*}(t) &= \frac{(\mu_d - r_d - \rho_1\theta M)e^{-r_d(T-t)}}{(m+\beta)\sigma_d^2}, \\ \pi_s^*(t) &= \frac{Me^{-r_d(T-t)}}{(m+\beta)\sigma_d}, \end{aligned} \quad (19)$$

接着将式(19)代入式(15)~(17), 可得 $\phi^*(t)$ 值为:

$$\begin{aligned} \phi_1^*(t) &= \frac{(\mu_d - r_d)\beta}{(m+\beta)\sigma_d}, \quad \phi_2^*(t) = \frac{(\sigma_f + \rho_2\theta)\beta M}{(m+\beta)\sigma_d}, \\ \phi_3^*(t) &= \frac{\sqrt{1-\rho_1^2-\rho_2^2}\theta\beta M}{(m+\beta)\sigma_d}. \end{aligned} \quad (20)$$

另外, 将式(19)代入式(18)得到一个关于 $A(t)$ 的微分方程为:

$$\begin{aligned} A_t - \frac{m}{2\sigma_d^2(m+\beta)} \left\{ (\mu_d - r_d)^2 - M \left[(\mu_f - r_f + \rho_2\theta\sigma_f)\sigma_d - (\mu_d + r_d)\rho_1\theta + 2\sigma_d(\rho_1\theta - \sigma_d(\mu_f - r_f + \rho_2\theta\sigma_f)) \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

最后对方程(21)求解, 可得 $A(t)$ 满足方程(10).

注 1 当市场中不存在汇率风险时, 值函数 $J(t, x)$ 满足:

$$J(t, x) = -(1/m) \exp(-mxe^{r_d(T-t)} + A(t)),$$

其中:

$$A(t) = \frac{m(T-t)}{2\sigma_d^2(m+\beta)} \left[(\mu_d - r_d)^2 - M((\mu_f - r_f)\sigma_d - 2\sigma_d^2(\mu_f - r_f)) \right],$$

$$M = (\mu_f - r_f)\sigma_d / \sigma_f^2.$$

另外, 投资者的最优投资策略为:

$$\pi_s^{d*}(t) = \frac{(\mu_d - r_d)e^{-r_d(T-t)}}{(m+\beta)\sigma_d^2}, \quad \pi_s^*(t) = \frac{Me^{-r_d(T-t)}}{(m+\beta)\sigma_d},$$

$\phi^*(t)$ 值为:

$$\phi_1^*(t) = \frac{(\mu_d - r_d)\beta}{(m+\beta)\sigma_d}, \quad \phi_2^*(t) = \frac{\sigma_f\beta M}{(m+\beta)\sigma_d},$$

$$\phi_3^*(t) = 0.$$

证明 当不考虑汇率风险时, 即市场中汇率不再随机, 即不受布朗运动影响, 因此 $\theta = 0$, 再由定理 1 可得结果.

注 2 当投资者为模糊中性, 且效用函数满足指数效用, 方程(9)有如下解的形式:

$$J(t, x) = -(1/m) \exp(-mxe^{r_d(T-t)} + A(t)),$$

其中:

$$A(t) = \frac{(T-t)}{2\sigma_d^2} \left\{ (\mu_d - r_d)^2 - M[(\mu_f - r_f + \rho_2\theta\sigma_f)\sigma_d - (\mu_d + r_d)\rho_1\theta + 2\sigma_d(\rho_1\theta - \sigma_d(\mu_f - r_f + \rho_2\theta\sigma_f))] \right\},$$

$$M = \frac{(\mu_f - r_f + \rho_2\theta\sigma_f)\sigma_d - (\mu_d + r_d)\rho_1\theta}{\sigma_f^2 + 2\sigma_f\rho_2\theta + (1-\rho_1^2)\theta^2}.$$

得到投资者的最优投资策略为:

$$\pi_s^{d*}(t) = \frac{(\mu_d - r_d - \rho_1\theta M_1)e^{-r_d(T-t)}}{m\sigma_d^2},$$

$$\pi_s^*(t) = \frac{M_1e^{-r_d(T-t)}}{m\sigma_d}.$$

证明 若投资者为模糊中性, 则 $\beta = 0$; 再由定理 1 可得到结果.

注 3 当市场不存在汇率风险, 投资者为模糊中性且效用函数满足指数效用, 方程(9)满足:

$$J(t, x) = -(1/m) \exp(-mxe^{r_d(T-t)} + A(t)),$$

其中:

$$A(t) = \left((T-t) / (2\sigma_d^2) \right) \left[(\mu_d - r_d)^2 - M((\mu_f - r_f)\sigma_d - 2\sigma_d^2(\mu_f - r_f)) \right],$$

$$M = \frac{(\mu_f - r_f)\sigma_d}{\sigma_f^2},$$

且投资者的最优投资策略为:

$$\pi_s^{d*}(t) = \frac{(\mu_d - r_d)e^{-r_d(T-t)}}{m\sigma_d^2}, \quad \pi_s^*(t) = \frac{Me^{-r_d(T-t)}}{m\sigma_d}.$$

证明 若不考虑汇率风险, 投资者为模糊中性时, 即 $\beta = 0$ 且 $\theta = 0$, 则由定理 1 可得结果.

3 数值算例

数值算例说明汇率风险和模糊厌恶程度对跨国投资者最优投资策略的影响, 这里 $\beta=0$ 表示投资者为模糊中性, $\beta=1$ 表示投资者为模糊厌恶. 其他用于数值计算的模型参数值见表 1.

表 1 相关参数取值

参数	r_d	r_f	μ_d	μ_f	σ_d	σ_f
数值	0.05	0.04	0.08	0.10	0.02	0.25
参数	ρ_1	ρ_2	t	T	m	
数值	0.2	-0.2	0	10	2	

图 1 为参数 σ_d 对最优投资策略 $\pi_s^d(t)$ 的影响. 从图 1 可发现, 最优投资策略 $\pi_s^d(t)$ 是 σ_d 的减函数, 随着 σ_d 增大, $\pi_s^d(t)$ 逐渐减少. 这是因为 σ_d 是国内股票价格的波动率, 当波动率增大时, 股票价格的风险随之增大, 因此投资者自然会减少对国内股票的投资.

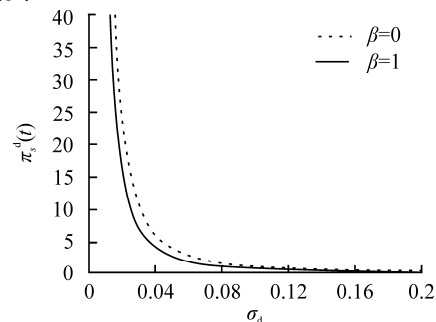


图 1 参数 σ_d 对最优投资策略 $\pi_s^d(t)$ 的影响

图 2 为参数 θ 对最优投资策略 $\pi_s^d(t)$ 的影响. 从图 2 可发现, 最优投资策略 $\pi_s^d(t)$ 是关于 θ 的增函数, θ 是汇率风险的波动率, 汇率风险的波动率越大, 国外股票价格风险越大, 因此投资者会减少对国外股票的投资, 进而更多地选择对国内股票的投资. 同时发现, $\beta=0$ 时最优投资策略 $\pi_s^d(t)$ 的

值大于 $\beta=1$ 时的值, 表明模糊厌恶环境下的投资低于模糊中性环境下的投资, 其原因是模糊厌恶环境下投资者更加厌恶风险, 因此投资策略相对更加保守.

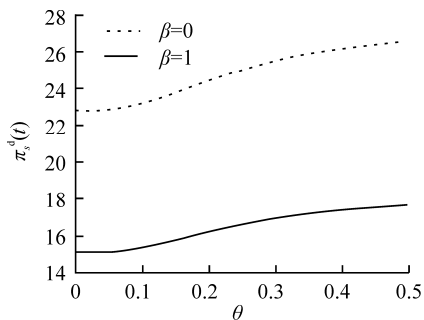


图2 参数 θ 对最优投资策略 $\pi_s^d(t)$ 的影响

图3为参数 m 对最优投资策略 $\pi_s^d(t)$ 的影响. 从图3可知, 随着 m 增加, 最优投资策略 $\pi_s^d(t)$ 减少. m 是风险厌恶系数, 即度量投资者对风险的厌恶程度, 所以当 m 增大时, 表明投资者更加厌恶风险, 因此会减少对风险资产的投资.

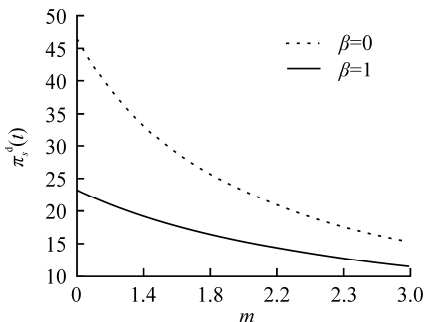


图3 参数 m 对最优投资策略 $\pi_s^d(t)$ 的影响

图4为参数 μ_d 对最优投资策略 $\pi_s^d(t)$ 的影响. 从图4可知, 随着 μ_d 的增加, 最优投资策略 $\pi_s^d(t)$ 也随之增加. μ_d 表示国内股票价格的平均回报率, μ_d 越高, 说明投资在国内股票上的收益越大, 因此选择购买国内股票更多.

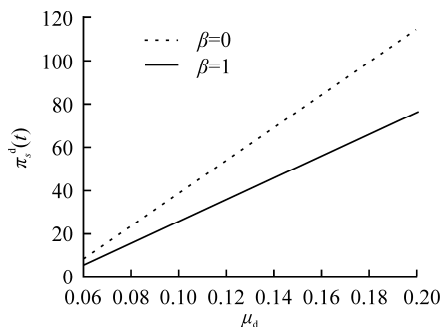


图4 参数 μ_d 对最优投资策略 $\pi_s^d(t)$ 的影响

图5和图6为参数 m 、 θ 和 m 、 σ_f 对最优投资策略 $\pi_s(t)$ 的影响. 由图5和图6可知, m 对最优投资策略 $\pi_s(t)$ 的影响同最优投资策略 $\pi_s^d(t)$ 的影响一致, 其原因是当风险厌恶系数 m 增大时, 投资者更加厌恶风险, 会减少对风险资产(无论该风险资产是国内资产还是国外资产)的投资. 此外, 从图5可知, 汇率波动率 θ 和最优投资策略 $\pi_s(t)$ 呈负相关, 其原因是 θ 越大意味着汇率风险的波动率越大, 考虑到汇率风险波动率加大会导致汇率风险增大, 因此投资者会减少对国外股票的投资. 同时, 从图6可知, 国外股票波动率 σ_f 与最优投资策略 $\pi_s(t)$ 也呈负相关, 这是因为当国外股票波动率 σ_f 增大时, 该股票的风险也增大, 因此在风险厌恶系数一定的情况下投资者会减少对国外股票的投资.

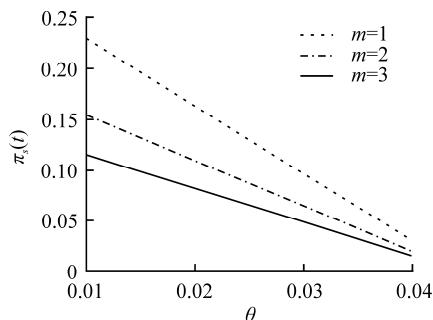


图5 参数 m 和 θ 对最优投资策略 $\pi_s(t)$ 的影响

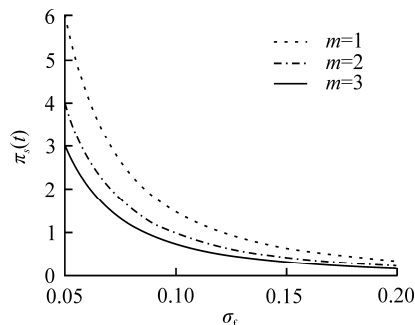


图6 参数 m 和 σ_f 对最优投资策略 $\pi_s(t)$ 的影响

4 结语

本文研究了当金融市场中存在汇率风险和投资者为模糊厌恶时的最优投资组合, 得到了最优投资策略的解析解. 研究结果表明: (1) 投资者为模糊厌恶时投资策略比模糊中性时更为保守, 即相对于风险资产, 投资者更愿意投资无风险资产; (2) 汇率风险的波动率越大, 投资者越会减少对国外

风险资产的投资,加大对国内风险资产的投资,表明模糊厌恶和汇率风险对最优投资策略影响较大.后续将进一步研究当风险资产和汇率动态满足跳扩散过程,且投资者为模糊厌恶时的稳健最优投资问题.

参考文献:

- [1] 闫伟, 李树荣. 带有汇率因素的不连续价格过程的最优投资组合研究[J]. 运筹与管理, 2008, 17(3):134-139.
- [2] 费为银, 高贵云, 夏登峰. 考虑汇率变动的跨国直接投资和税收政策研究[J]. 系统工程学报, 2015, 30(6): 746-754; 864.
- [3] 费为银, 何丹丹, 张伟. 跳扩散下汇率变动的外商直接投资问题研究[J]. 系统工程理论与实践, 2015, 35(2): 283-290.
- [4] Guo C, Zhuo X Y, Constantinescu C, et al. Optimal reinsurance-investment strategy under risks of interest rate, exchange rate and inflation[J]. Methodology and Computing in Applied Probability, 2018, 20(4):1477-1502.
- [5] 黄婵, 王伟, 温利民. 汇率风险和方差保费原理准则下最优投资和再保险策略[J]. 应用概率统计, 2019, 35(5): 508-524.
- [6] 邢钰, 徐玉华, 王晓燕. 汇率带有跳跃情形下的外商直接投资的最优投资组合问题[J]. 数学的实践与认识, 2020, 50(9):284-295.
- [7] Ellsberg D. Risk, ambiguity, and the savage axioms[J]. The Quarterly Journal of Economics, 1961, 75(4):643-669.
- [8] Bossaerts P, Ghirardato P, Guarnaschelli S, et al. Ambiguity in asset markets: Theory and experiment[J]. The Review of Financial Studies, 2010, 23(4):1325-1359.
- [9] Dimmock S G, Kouwenberg R, Mitchell O S, et al. Ambiguity aversion and household portfolio choice puzzles: Empirical evidence[J]. Journal of Financial Economics, 2016, 119(3):559-577.
- [10] Maenhout P J. Robust portfolio rules and asset pricing[J]. Review of Financial Studies, 2004, 17(4):951-983.
- [11] Branger N, Larsen L S. Robust portfolio choice with uncertainty about jump and diffusion risk[J]. Journal of Banking & Finance, 2013, 37(12):5036-5047.
- [12] Zeng Y, Li D P, Chen Z, et al. Ambiguity aversion and optimal derivative-based pension investment with stochastic income and volatility[J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 2018, 88:70-103.
- [13] Sun Z Y, Zheng X X, Zhang X. Robust optimal investment and reinsurance of an insurer under variance premium principle and default risk[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2017, 446(2): 1666-1686.
- [14] Zhang Q, Chen P. Robust optimal proportional reinsurance and investment strategy for an insurer with defaultable risks and jumps[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2019, 356:46-66.
- [15] Wang N, Zhang N, Jin Z, et al. Robust non-zero-sum investment and reinsurance game with default risk[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2019, 84:115-132.

Optimal investment strategies with exchange rate risk and ambiguity aversion

LI Quan, XU Song, WANG Wei*

(School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: The robust optimal investment problem with exchange rate risk is studied in the case of ambiguity aversion and exponential utility. We assume that investors are those of ambiguity aversion and plan on investing in risk-free bonds, foreign stocks and domestic stocks. With the goal of maximizing the expected utility of terminal wealth, the corresponding HJB equation is obtained using the principle of stochastic dynamic programming, and then the analytical solution of the optimal investment strategies with ambiguity aversion and ambiguity neutrality are obtained by using the first-order optimal conditions and solving the HJB equation. Finally, numerical results and economic explanations are given. The numerical results show that the degree of ambiguity aversion and exchange rate risk impose a great influence on the optimal investment strategies.

Key words: ambiguity aversion; exchange rate risk; optimal portfolio

(责任编辑 史小丽)